

מיפוי רשת הדירקטורים בישראל

ד"ר אייל סולגניק
פרופ' יצחק סוארי
מר לירון קונסטנטין

ינואר 2008

תודתנו והערכתנו העמוקות נתונות לפרופ' נוגה אלון על יעוץ מתימטי לעבודה. כמו-כן נתונה תודתנו הרבה לעו"ד עודד ערן ולרו"ח ערן צ'רנינסקי על הערותיהם והארותיהם המועילות. תודתנו נתונה גם לעו"ד אורלי שלוסברג על סיועה בליבון עניינים הקשורים לחוק החברות וכן למר אבי כתב על תיכנות האלגוריתם המרכזי בעבודה. תודה מיוחדת נתונה לרשות ניירות ערך, אשר לולא עזרתה הרבה באיסוף הנתונים, עבודה זו לא הייתה מגיעה לידי גמר.

תוכן העניינים

1. מבוא
2. רקע
3. הכרות קצרה עם תורת הגרפים
4. מהי רשת דירקטורים?
 - א. הגדרות, מונחים וחישובים בסיסיים
 - ב. האלגוריתם של דייקסטר
 - ג. מציאת המרחק בין שני דירקטורים - דוגמה
5. מודל רשת הדירקטורים הרנדומלית
6. רשת הדירקטורים בישראל
 - א. הנתונים הבסיסיים
 - ב. דיון ברכיב הקשירות הגדול עבור $d=1$
 - ג. ההתפלגות השלמה של המרחקים עבור כל דירקטור (עבור כל $d>0$)
 - ד. רשימת הדירקטורים והחברות המקושרים ביותר
 - ה. מה גורם לדירקטור להיות מקושר?
7. האם הדירקטורים החיצוניים מעלים או מורידים את רמת הריכוזיות?
 - ז. דירקטוריות - האם מקושרות יותר או פחות?
8. מציאת המרכז הגיאוגרפי של הרשת
 - א. עד כמה קטנה רשת הדירקטורים בישראל?
 - א. טרנזיטיביות רשתית
 - ב. מרחק בין הקודקודים
 - ג. טבלה מסכמת
9. סיכום
 - נספח א' - אופן החישוב של רשת הדירקטורים האקראית
 - נספח ב' - ניתוח מתמטי של אילוצי גודל בעולם הדירקטורים
 - ביבליוגרפיה נבחרת

1. מבוא

השערורייה החשבונאית האחרונה בארה"ב, לאחר "מגיפת האנרוניטיס", הנה שערוריית ה-BACKDATING בנושא האופציות למנהלים. עד מהרה הפכה בעיה, לכאורה, חשבונאית, שמעטים מבינים בה, הנובעת, בחלקה לפחות, מחוסר יעילות בכללי החשבונאות, לבעיה של טוהר מידות, בעיה-שבה מעורבים רכיבים של מוסריות כלכלית, ומשם, קצרה הייתה הדרך לשורה של משפטיים פליליים, אשר "הניבו ויניבו" שנים לא מעטות של מנכ"לים בכירים מאחורי הסורגים.

LIE¹, במאמרו המפורסם משנת 2005 בכתב העת MANAGEMENT SCIENCE, אשר בעקבותיו נחשפה, או אולי נכון לומר פרצה, השערורייה (ראה: <http://www.biz.uiowa.edu/faculty/eliel/Grants-MS.pdf>), קובע:

"This study documents that the abnormal stock returns are negative before unscheduled executive option awards and positive afterward. The return pattern has intensified over time, suggesting that executives have gradually become more effective at timing awards to their advantage, and possibly explaining why the results in this study differ from those in past studies. Moreover, I document that the predicted returns are abnormally low before the awards and abnormally high afterward. Unless executives possess an extraordinary ability to forecast the future market-wide movements that drive these predicted returns, the results suggest that at least some of the awards are timed retroactively."

במחקר מאוחר יותר², אשר ניסה להתחקות אחר היקף התופעה, קובעים לי ושותפו:

"...Finally, at the firm level, we estimate that 29.2% of firms manipulated grants to top executives at some point between 1996 and 2005...."

¹ Lie (2005), "On the Timing of CEO Stock Option Awards", management science, pp. 802-812.

² Lie E. & Heron R.A. (2006), "What fraction of stock option grants to top executives have been backdated or manipulated?".

הנה כי כן, המדובר בתופעה מאוד נפוצה, תופעה-אשר בהינתן העובדה שהיא אופיינה, מאוחר יותר, כהתנהגות פלילית, מדהים ומפתיע, לא פחות, כי היא כה נפוצה בקרב חברות הנהנות מיכולות ניתוח מהטובות בעולם, חברות אשר אמורות היו לדעת מה המחיר של סטייה מהנורמות, חברות אשר היה להן מעט מאוד להרוויח מכך והמון להפסיד.

בהינתן תופעה, מפתיעה זו, של פרקטיקה, אשר בדיעבד מוכרזת כפלילית, ההופכת תוך זמן קצר לנפוצה ביותר בעולם העסקי, שאלנו את עצמנו, גם בהקשר זה של ה-BACKDATING וגם בהקשרים דומים אחרים בהם נתקלנו בשנים האחרונות, הקשרים-במסגרתם ראינו פרקטיקות, חשבונאיות ומשפטיות, קונות אחיזה בו זמנית בכל המשק, האם קיים, ואם כן- מהו המבנה שבבסיס ה"עולם התאגידי" המעודד תופעות מעין אלו. תופעות מהטיפוס של "כך כולם עושים" בהקשר של פרקטיקות חשבונאיות, משפטיות ועסקיות. ואם כן, מה המשמעויות של תופעות אלה ומהן ההשלכות לקובעי מדיניות ולשחקנים במשחק הכלכלי?

אנו מוצאים לראוי להדגיש, כי אף שפתחנו מאמר זה בהתייחסות לתופעת "כך עושים כולם" בהקשר השלילי של BACKDATING, הרי שמבנה המעודד תופעה של "כך עושים כולם" אינו בהכרח שלילי. פעמים, יש בכך היבטים חיוביים מאוד, כאשר פרקטיקות ראיות של ממשל תאגידי, ניהול סיכונים, שקיפות, בקרה ועוד, "מחלחלות" מחברה לחברה.

מבלי להרחיב את יריעת הדיון, נאמר כי מבנה המעודד את תופעת "כך עושים כולם" הוא מבנה בו, בין היתר, מתקיים כי התאגידים קשורים ביניהם בממסרים טובים ומהירים של מעבר אינפורמציה, כי התאגידים חשופים לסיכון ואחריות דומים, ולכן נוטים להתנהגות של עדר, וקיים בקרבם, גם בשל מבנה שוק ההון והתמריצים בו, רצון להשוואתיות.

ואכן תנאים אלה, ההכרחיים, בתמהיל זה או אחר, להיווצרות מבנה המעודד את תופעת "כך עושים כולם", מתקיימים בשוקי ההון בעולם ובשוק ההון הישראלי בפרט. וכך, תאגידים רבים נהנים משירותיהם של אותם יועצים משפטיים ורואי חשבון חיצוניים (וכזכור, במשך שנים רבות אף נהגה בישראל התפיסה המעודדת את התופעה, לפיה, כלל חשבונאי טוב הוא כלל חשבונאי נהוג, היינו מקובל)³. זאת ועוד, התאגידים מפרסמים דיווחים פומביים מפורטים

³ ראה מאמר של אייל סולגניק שפורסם בשנת 1992 ב"רואה החשבון" על תהליך היווצרותה של פרקטיקה חשבונאית מקובלת.

מהם יכולים ללמוד תאגידים אחרים על פעולות התאגיד המדווח, וגם: **תאגידים רבים חולקים דירקטורים משותפים**.⁴

בנקודה זו, של **דירקטורים משותפים**, ובה בלבד, תתמקד עבודתנו זו: הבנה של הקשרים (המתמטיים-לא הרכילותיים) ב"עולם הדירקטורים", אלה הסמויים מן העין שאינה מצוידת בכלים המתוחכמים שנציג. ההדגשה שלא נעסוק בהיבטים הרכילותיים של "עולם הדירקטורים" בישראל אינה מקרית. איננו חפצים שעבודתנו, המצביעה, בין היתר, על האדם המהווה את "מרכז רשת הדירקטורים" ועל החברות המהוות "צמתים" ברשת, תהפוך כולה לעניין רכילותי מהסגנון של "מי היה מאמין ש- דירקטור XYZ הוא כל כך מרכזי.....". אלא, אנו חפצים שהעבודה תהווה תשתית למקבלי החלטות בגיבוש עמדות עקרוניות. מטעם זה, בחרנו לאכזב קצת את קהל קוראינו ולספק את המידע על מידת הקישוריות בקודים: "דירקטור א'", "דירקטור ב'" וכדו' ללא ציון שמות של אנשים או חברות.

אנו מוצאים לראוי להדגיש כי הרכיב של "קשרים בעולם הדירקטורים", נושא עבודתנו, הנו רכיב חשוב אך בוודאי לא יחיד בהיווצרותן של תופעות מטיפוס "כך עושים כולם" בעולם התאגידי ובמצבים דומים אחרים. גם בהעדר דירקטורים משותפים קיים דמיון רב בפעולת חברות בשוק ההון בכל הנוגע לפרקטיקות חשבונאיות ומשפטיות: חברות רבות נתקלות בתקופות זמן מסוימות בסוגיות דומות שטעונות פתרון, וסביר כי פתרונות שיאומצו על ידי חברות מסוימות ישקלו בחיוב גם על ידי חברות אחרות הפועלות באותה סביבה. כך לדוגמא, גם בהעדר קשרים בעולם הדירקטורים, סביר להניח כי דירקטוריון של חברה מסוימת יעדיף, מבין שני פתרונות אלטרנטיביים המשיגים תוצאה דומה, פתרון שאומץ כבר על ידי חברה אחרת, שיצרה לצורך כך מעין "תקדים" ונתנה לגיטימציה לאותו פתרון. זאת, בין השאר בשל העובדה שחברות ציבוריות כפופות לחובות גילוי נרחבות, ובמקרים רבים הפתרון שבחרה חברה מסוימת מצא ביטוי בדוחות ציבוריים שפרסמה, ובכך נחשף לעיני תאגידים אחרים, גם בהעדר זהות בדירקטורים.

הסבר מעניין אחר להתנהגות תאגידים בשוק ההון, גם בהקשר של פרקטיקות חשבונאיות ומשפטיות, הוא זה המבוסס על התורה של "מפלי אינפורמציה"-INFORMATION CASCADES. נקדיש מספר שורות לעניין מעניין זה. ההגדרה המקובלת ל"מפלי אינפורמציה" היא (ראה למשל http://en.wikipedia.org/wiki/Information_cascade):

⁴ Collins, Daniel W., Gong, Guojin and Li, Haidan , "Corporate Governance and Backdating of Executive Stock Options" (April 2007), מוצאים כי בחברות בהן היו דירקטורים משותפים התופעה הייתה רחבה יותר.

An **information cascade** or **informational cascade** is a situation in which every subsequent actor, based on the observations of others, makes the same choice independent of his/her private signal. In an informational cascade, everyone is individually acting rationally. Still, even if all participants as a collective have overwhelming information in favor of the correct action, each and every participant may take the wrong action.

A little bit of public information (or an unusual signal) can overturn a long-standing informational cascade. That is, even though a million people may have chosen one action, seemingly little information can induce the next million people to choose the opposite action. Fragility is an integral component of an informational cascade. There are two key conditions in an informational cascade model:

1. Sequential decisions with subsequent actors observing decisions (not information) of previous actors.
2. A limited action space (e.g. an adopt/reject decision).

היינו, ייתכן שחברה מסוימת נקטה בפרקטיקה חשבונאית שגויה, ובעקבות כך ייווצר "מפל אינפורמציה" בקרב תאגידים אחרים שינקטו אף הם בפרקטיקה השגויה אף שבידם אינפורמציה המורה על שיטה ראויה אחרת.

לפני שנפרט אודות הקשרים בעולם הדירקטורים, מספר מילים על התמונה הרחבה יותר של קשרים באוכלוסיות כלשהן:

כל מי שבילה אי פעם במסיבה, חווה את החוויה, שלאחר שיחה קצרה עם זר מושלם, הם גילו מכרים משותפים, וסיכמו את החוויה במילים "איזה עולם קטן". בדרך כלל, בעיקר בישראל, הנטייה היא לייחס את "העולם הקטן" למבנה החברה הישראלית, הכוללת אוכלוסייה קטנה יחסית, הנפגשת בצמתים רבים. ברם, זוהי אחת התופעות המפורסמות, אשר אינה ייחודית לישראל, ובמשך שנים הייתה בעלת אופי אנקדוטלי: "תופעת העולמות הקטנים" או בשמה

SIX DEGREES OF SEPARATION הידוע יותר

כך למשל, באתר אינטרנט המנוהל על ידי צוות חוקרים מאוניברסיטת קולומביה, בראשות **Duncan J. Watts**, אדם שתרומתו לחקר התופעה של ה"עולם הקטן" היא מכרעת, מתנהל "שחזור" מדהים, מותאם לעידן האינטרנט, של הניסוי המפורסם והמבריק שערך הפסיכולוג MILGRAM (ראה: (J. Travers, S. Milgram, *Sociometry* 32, 425 (1969) על מנת לברר כמה דרגות הפרדה יש בין שני אנשים כלשהם בעולם. כזכור, מילגרם "הוכיח", וכיום יש המערערים על איכות הניסוי וכלליות ממצאיו, כי בין כל שני אנשים בעולם יש בממוצע "שש דרגות הפרדה".

להלן, בקצרה, מתודת הניסוי העדכני, החשובה להבנת הממצאים :

We have addressed these issues by conducting a global, Internet-based social search. Participants registered online and were randomly allocated one of 18 target persons from 13 countries. Targets included a professor at an Ivy League university, an archival inspector in Estonia, a technology consultant in India, a policeman in Australia, and a veterinarian in the Norwegian army. Participants were informed that their task was to help relay a message to their allocated target by passing the message to a social acquaintance whom they considered "closer" than themselves to the target. Of the 98,847 individuals who registered, about 25% provided their personal information and initiated message chains. Because subsequent senders were effectively recruited by their own acquaintances, the participation rate after the first step increased to an average of 37%. Including initial and subsequent senders, data were recorded on 61,168 individuals from 166 countries, constituting 24,163 distinct message chains. More than half of all participants resided in North America and were middle class, professional, college educated, and Christian, reflecting commonly held notions of the Internet-using population.

המסקנות מהמחקר המקיף מרתקות (ההדגשות-שלנו) :

We report on a global social-search experiment in which more than 60,000 e-mail users attempted to reach one of 18 target persons in 13 countries by

forwarding messages to acquaintances. We find that successful social search is conducted primarily through **intermediate to weak strength ties**, does **not** require highly connected "**hubs**" to succeed, and, in contrast to unsuccessful social search, disproportionately relies on **professional relationships**. By accounting for the attrition of message chains, we estimate that social searches can reach their targets in a median of five to seven steps, depending on the separation of source and target, although small variations in chain lengths and participation rates generate large differences in target reachability. We conclude that although global social networks are, in principle, searchable, actual success depends sensitively on individual incentives.

היינו, הניסוי האינטרנטי שב ומאשש את מסקנות הניסוי המפורסם של MILGRAM: העולם הוא אכן "עולם קטן" של ב"ממוצע" שש דרגות הפרדה. יותר מכך, קשרים מקצועיים (ולא קשרים משפחתיים, למשל) הם הקשרים הרלבנטיים ברשתות חברתיות, וכן חיפוש יעיל ברשת חברתית אינו מחייב שימוש ב"רכזות", היינו אותם אנשים שהם "מקושרים במיוחד", בעלי "אינסוף" קשרים.

הנתונים שנאספו במחקר מלמדים גם על מקורות הקשרים וגם על התנהגות שונה של גברים ונשים ברשת חברתית (אנו נתייחס בהמשך למידת הקישוריות של הנשים ברשת הדירקטורים בישראל) ולא פחות מכך על חשיבותם של "קשרים חלשים":

When passing messages, senders typically used friendships in preference to business or family ties; however, almost half of these friendships were formed through either work or school affiliations. Furthermore, successful chains in comparison with incomplete chains disproportionately involved professional ties (33.9 versus 13.2%) rather than friendship and familial relationships (59.8 versus 83.4%). Successful chains were also more likely to entail links that originated through work or higher education (65.1 versus 39.6%).

Men passed messages more frequently to other men (57%), and women to other women (61%), and this tendency to pass to a same-sex contact was strengthened by about 3% if the target was the same gender as the sender and similarly weakened in the opposite case. Individuals in both successful and unsuccessful chains typically used ties to acquaintances they deemed to be "fairly close." However, in successful chains "casual" and "not close" ties were chosen 15.7 and 5.9% more frequently than in unsuccessful chains thus adding support, and some resolution, to the longstanding claim that "weak" ties are disproportionately responsible for social connectivity.

הנושא של "קשרים חלשים" עלה לראשונה בעבודתו החשובה של M. S. Granovetter, *Am. J. Sociol.* 78, 1360 (1973), שם הומחש כי הזדמנויות, הפצת אינפורמציה, חיפוש ברשת החברתית ומוביליות תלויים במידה רבה דווקא בקשרים החלשים, היינו קשרים עם אנשים שאינם חברינו הקרובים, שכן החברים הקרובים מהווים במידה רבה חוג סגור ומוגבל, שכל אחד מחבריו מכיר היטב את האחר.

לבסוף, מסקנה מעניינת וחשובה במיוחד למחקר על רשתות חברתיות כמו גם להבנת רשת הדירקטוריים, היא שהבנת המבנה של חברה אינו יכול להתמצות רק בהבנת המבנה הטופולוגי של הרשת. יש להבין היטב גם את **התמריצים והפעולות** של השחקנים.

בלשון המחקר (ההדגשה-שלנו):

Our results therefore suggest that if individuals searching for remote targets do not have sufficient incentives to proceed, the small-world hypothesis will not appear to hold but that even a slight increase in incentives can render social searches successful under broad conditions. More generally, the experimental approach adopted here suggests that empirically observed network structure can only be meaningfully interpreted in light of the actions, strategies, and even perceptions of the individuals embedded in the network: **Network structure alone is not everything.**

היינו, גם אם רשת מסוימת: של דירקטורים, של רואי חשבון, של יועצים, או של עורכי דין וכדו', מציגה, לפי המבנה הטופולוגי שלה, "עולם קטן", אין זה בגדר ההכרח כי תופעות אופייניות לעולם זה (חיוביות ושליליות) בהכרח תקרינה. הבנה של מערכת התמריצים (למשל: קנסות כבדים על הפרת סודיות, פעולה בניגוד עניינים ועוד) והתפיסות של השחקנים (למשל, הגישה שלהם לאתיקה) הנה עניין חשוב ביותר. שאלה מעניינת למחקר בנושא זה, הנה, האם מערכות התמריצים והתפיסות הן שמכתיבות, בשיווי משקל, את המבנה של הרשת.

הנה כי כן, תופעת העולם הקטן היא תופעה חשובה. השלכותיה של תופעה זו מרחיקות לכת וחורגות בהרבה מתחום השעשוע לאור הרלבנטיות שלהן למבנה רשתות רבות, לרבות האינטרנט, להתפשטות מגיפות, להכחדת שפות ועוד. במאמר מוסגר נציין, כי נושא זה של **הכחדת שפות** הנו מעניין ביותר גם בהקשר החשבונאי. אחד החסרונות הגדולים, עליהם לא מדברים כמעט, בהקשר של המעבר לתקינה הבינלאומית, של אימוץ שפה חשבונאית אחת באופן אחיד בעולם כולו, הנו אובדן ה"גיוון", ה-DIVERSITY, באסכולות חשיבה חשבונאיות, על דרך הכחדתן. וכך, אם חלילה יתברר, יום אחד בעתיד, ש"התקינה הבינלאומית הייתה הימור שגוי", לא יהיה "לאן לחזור". להרחבה על עניין זה ראה גם: מאמרו של אייל סולגניק, בכתב העת משפט-עסקים, של המרכז הבינתחומי הרצליה, החשבונאות המודרנית לאור רעיונות גדולים אחרים: "הערות חופשיות", ולניתוח מתימטי של תופעת הכחדת השפות, ראה למשל: Abrams and Strogatz, Modeling the dynamics of language death, Nature 424 (2003) 900.

ההסברים לתופעה זו, של שש דרגות הפרדה, אינם טריביאליים, בלשון המעטה. הם נעים מהסברים העושים שימוש עמוק בתורת הגרפים וכלה בהסברים העושים שימוש בחוקי חזקה.

נציין, מבלי להרחיב, כי חוקי חזקה, POWER LAWS, חשובים ביותר להבנת התופעה אותה אנו מנתחים. בין היתר, יש בהם כדי להסביר מדוע נוצרות "רכוזות"-דירקטורים מקושרים במיוחד.

כך למשל, במאמר שפורסם לאחרונה, Structure and tie strengths in mobile communication networks, בו נטל חלק BARABASI, פיזיקאי שרשומה לזכותו התקדמות רבה בתחום זה (אשר פירסם את הספר המפורסם על קישוריות), יחד עם:

J.-P. Onnela, J. Saramaki, J. Hyvonen, G. Szabo, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertesz

נאמר :

Electronic databases, from phone to e-mails logs, currently provide detailed records of human communication patterns, offering novel avenues to map and explore the structure of social and communication networks. Here we examine the communication patterns of millions of mobile phone users, allowing us to simultaneously study the local and the global structure of a society-wide communication network. We observe a coupling between interaction strengths and the network's local structure, with the counterintuitive consequence that social networks are robust to the removal of the strong ties but fall apart after a phase transition if the weak ties are removed. We show that this coupling significantly slows the diffusion process, resulting in dynamic trapping of information in communities and find that, when it comes to information diffusion, weak and strong ties are both simultaneously ineffective.

היינו, גם מחקר זה מצביע על חשיבותם של ה"קשרים החלשים".

ובחזרה לעולם הדירקטורים. במחקר זה, נבדוק, בהמשך לבדיקות שנעשו בשוקי הון בעולם, כיצד נראה עולם הדירקטורים בחברות ציבוריות בישראל. נענה גם על השאלה, האם עולם הדירקטורים בישראל הוא אכן **עולם קטן** (עניין הטעון הגדרה מתאימה, שתובא בהמשך והשוואה, לא פשוטה, לרשתות תיאורטיות) ואם כן עד כמה קטן. אנו סבורים שלמחקר מעין זה, שטרם נעשה כמותו בישראל, יכולות להיות השפעות משמעותיות על קובעי מדיניות בתחומים של אחריות דירקטורים, מינוי והרכב דירקטוריונים, חוק ניירות ערך, הגבלים עסקיים, חוק החברות, חשבונאות, מיסוי ועוד, כמו גם על מבטחי סיכונים-בעיקר בביטוח אחריות נושאי משרה. אנו נצביע על חלק מההשלכות. נעיר, כי אף שחקיקה שעניינה "**ניגודי עניינים**" ו"**עניין אישי**" נוגעת, **בעקיפין**, לתופעת הקישוריות, עד כה נמנע כמעט המחוקק לעסוק **במישרין** בתופעה זו של קישוריות. היוצא מן הכלל בחוק החברות, הוא: האיסור החל מכוח סעיף 240 (ד) לחוק החברות על מינוי דירקטור חיצוני לחברה מסוימת (חברה ב'), אם דירקטור אחר המכהן בחברה ב', והדירקטור החיצוני שמינויו נשקל, מכהנים שניהם כדירקטורים בחברה א'. (המחוקק גם מתייחס בסעיף 270 למצב המעניין של חפיפה בין דירקטוריונים).

אנו סבורים שהקהילה העסקית עשויה אף היא להפיק ערך ממחקר כזה, משום שלראשונה תשורטט מפת העלויות והתועלות, גם אם באופן חלקי, הנגזרת מהמבנה של עולם הדירקטורים בישראל, לרבות על דרך ההשוואה לשווקים מפותחים אחרים.

אנו סבורים שמחקרנו, יחד עם מחקרי המשך שיערכו, יכול לסייע במתן תשובות, לסדרה ארוכה של שאלות חשובות של קביעת מדיניות בתחומי חוק חברות וחוק ניירות ערך, ובהן, לשם הדוגמא:

1. האם יש מקום להגביל את מספר הדירקטוריונים (**שאינם** בקבוצה אחת, כגון דירקטוריון של חברה אם ובת, אף אם אינה בבעלות מלאה) בהם יכול אדם לכהן, ואם כן-האם המספר המרבי הוא אותו לכל דירקטור, או שהנו תלוי בפרמטרים שונים (אופי החברה, הענף, מספר הדירקטורים, מידת הקישוריות שלהם וכו')?
2. מה המשמעויות הנובעות מכך **שדירקטור חיצוני** מכהן ככזה במספר דירקטוריונים?
3. האם המבנה של "רשת הדירקטורים" צריך להשפיע על קביעת משך הכהונה של דירקטורים?
4. האם **חברות ביטוח**, המבטחות דירקטורים בביטוח נושאי משרה, צריכות ליחס משקל ניכר ל"רשת הדירקטורים"?
5. האם החוק המעודד מינוי בני המין השני לדירקטוריונים (סעיף 239 לחוק החברות) הביא לרמת קישוריות נאותה של דירקטוריות ברשת?
6. מה ההשפעה של "רשת הדירקטורים" על תפוצתן ושכיחותן של פרקטיקות שונות?
7. האם קיים מתאם גבוה בין הקישוריות של דירקטורים לקישוריות של יועצים שונים סביב לאותן חברות?
8. האם יש מקום לחשיבה מחודשת ורעננה על מונחי השסתום של "**ניגוד עניינים**" ו"**עניין אישי**" לאור הטופולוגיה הרשתית?

אנו מוצאים לראוי לציין, בהקשר לחלק משאלות אלה, כי פרופ' יוסף גרוס, בספרו המקיף והמלומד על "חוק החברות החדש", מתייחס לסעיפים שנכללו בהצעת חוק החברות, אשר לא אושרו על ידי הכנסת, ובהם:

- סעיף 273(א) שקבע מגבלה על מספר הדירקטוריונים בהם רשאי אדם המכהן כדח"צ להיות חבר בנוסף להיותו דח"צ.

- חובת הצהרה של הדירקטור כי אין בעיסוקיו האחרים כדי להשפיע על יכולתו לתפקד.

בהמשך נשוב לניתוחו של פרופ' גרוס את "אילוץ הזמן".

בצד האמפירי-מתמטי של עבודתנו נתבסס על המתודולוגיה שהונחה במאמר :

Canyon, Martin J. and Muldoon, Mark R., "The Small World Network Structure of Boards of Directors" (May 2004). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=546963>

בינתיים מאמר מעניין זה כבר התפרסם תחת שם דומה בכתב בעת אקדמי :

Journal of Business Finance & Accounting, Vol. 33, Nos. 9-10, pp. 1321-1343, November/December 2006.

שני מאמרים נוספים, מאותו בית יוצר, המרחיבים את הדיון בנושא, הם :

Canyon, Martin J. and Muldoon, Mark R., "Ranking Boards of Directors" (January 2008). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1083924>

Canyon, Martin J. and Muldoon, Mark R., "Ownership and Control: A Small-World Analysis" (December 2007). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1083425>

עבודתנו זו היא בגדר סנונית ראשונה. אנו מקווים כי בעקבותיה תעשינה עבודות הנוגעות לרשתות מעניינות אחרות. כך למשל, רשת יועצים, רשת רואי החשבון, רשת עורכי הדין ועוד. עם זאת, ברור כי עבודות כאמור מורכבות הרבה יותר בשל אי זמינותם של נתונים פומביים. אנו סבורים כי ניתוח ואפיון רשתות אלה יוכלו לסייע בהבנת היתרונות הרבים הגלומים בשימוש באותם יועצים (כגון: רואי חשבון ויועצים משפטיים), אך בה בעת, להצביע על התגברות הסכנה ל"התפשטות וירוסים חשבונאיים ומשפטיים" בשוק ההון כולו.

אנו מקווים, שבד בבד, יעשו ניסיונות להבין את התמונה הרחבה יותר של "ממסרים בין תאגידים" על מנת שהפיקוח, שכיום, גם במפותחים שבשווקים, ממוקד כולו בחברה הבודדת, יותאם לעולם מורכב זה.

2. רקע

מועצת המנהלים של כל חברה ציבורית (היינו, שניירות הערך שלה נסחרים בבורסה) מונה מספר אנשים מצומצם (הגודל הממוצע של דירקטוריון חברה בישראל הוא כ-5.5 דירקטורים). לדירקטורים אלה כוח ואחריות רבים ביחס להתנהלותה של החברה לרבות קביעת האסטרטגיה שלה. מועצת המנהלים, היא הדירקטוריון, אחראית על קביעת תוכניות הפעולה של החברה, מינוי והדחת מנכ"לים⁵, מיזוגים⁶ רכישות ועוד. פרופ' גרוס, בספרו המקיף אודות "חוק החברות החדש" מסביר באופן מאיר עיניים את תפקידי הדירקטוריון ואת שילובו במערך האורגני. על מנת להבטיח את תפקודם ואת אופן השימוש בכוחם ובאחריותם הרבים, מטיל חוק החברות, התשנ"ט-1999 ("חוק החברות"), מספר חובות על הדירקטורים, כנושאי משרה, כאשר העיקריות שבהן הינן חובות זהירות⁷ ואמונים⁸ לחברה.

ככלל, חובת הזהירות מחייבת את הדירקטור שלא להתרשל במסגרת מילוי תפקידו בחברה⁹. חוק החברות מחייב את הדירקטור לפעול "ברמת מיומנות שבה היה פועל נושא משרה סביר, באותה עמדה ובאותן נסיבות"¹⁰. בנוסף, נדרש הדירקטור לקבל "מידע הנוגע לכדאיות העסקית של פעולה המובאת לאישורו או של פעולה הנעשית על ידיו בתוקף תפקידו" וכן לקבל "כל מידע אחר שיש לו חשיבות לעניין פעולות כאמור"¹¹.

בהתאם לחובת האמונים של הדירקטור, עליו לנהוג בתום לב ולפעול לטובת החברה, ובכלל זה:¹²

- (1) "יימנע מכל פעולה שיש בה ניגוד עניינים בין מילוי תפקידו בחברה לבין מילוי תפקיד אחר שלו או לבין ענייניו האישיים;
- (2) יימנע מכל פעולה שיש בה תחרות עם עסקי החברה;
- (3) יימנע מניצול הזדמנות עסקית של החברה במטרה להשיג טובת הנאה לעצמו או לאחר;
- (4) יגלה לחברה כל ידיעה וימסור לה כל מסמך הנוגעים לענייניה, שבאו לידי בתוקף מעמדו בחברה."

5 סעיפים 92(א)(7) ו-250 לחוק החברות.

6 סעיף 314 לחוק החברות.

7 סעיף 252(א) לחוק החברות.

8 סעיף 254(א) לחוק החברות.

9 מ' אוחיון, דיני חברות חדשים בישראל (בית הספר הישראלי ללימודי תאגידים ושוק ההון, 2001), 6-7.

10 סעיף 253 לחוק החברות.

11 ש.ס.

12 סעיף 254(א) לחוק החברות.

חוק החברות מייחס חשיבות רבה לחובות המוטלות על הדירקטור. כך למשל, הפרת חובת אמונים של דירקטור כלפי החברה כמוה כהפרת חוזה, ורואים בדירקטור שהפר חובת אמונים כלפי החברה כמי שהפר את התקשרותו עם החברה.¹³

חובת האמונים, יש לציין, אינה עוסקת במפורש או במישרין בשאלה של "דירקטורים משותפים", אך אין ספק שיש לה רלבנטיות גבוהה למצב זה.

הלחץ על הדירקטורים בישראל, בשאלת אחריותם ומילוי תפקידם, הוגבר עד מאוד בעת האחרונה. לצד מקרים שהגיעו לבתי המשפט, בהם הוטלה אחריות על דירקטורים, גם רשות ניירות ערך סימנה אותם כ"שומרי הסף" האולטימטיביים, וככאלה-כגורמים שיש לוודא כי יפעלו לפי הקוד הגבוה ביותר. ביטוי לדברים ניתן בהרצאה חשובה ומקיפה שנשא בשנת 2007 יו"ר רשות ניירות ערך, משה טרי, במסגרתה הוא "רענן" את זכרון החברות והדירקטורים בדבר חשיבות תפקידם, המיומנות הנדרשת מהם, השקעת הזמן והמאמץ, והדגיש, עניין חשוב במיוחד לעבודתנו זו, **כי כשל בחברה אחת יכול להקרין על שוק ההון כולו.**

החברות, מצידן, עושות מאמצים לגייס דירקטורים מיומנים, בעלי ניסיון, אך גם כאלה שהם מקושרים היטב. מנכ"לים לשעבר, קצינים בכירים בדימוס, רואי-חשבון בכירים שפרשו ממשרדיהם, עורכי דין לשעבר ופוליטיקאים לשעבר מחוזרים כדי למלא תפקיד של דירקטורים בכמה מועצות מנהלים בו-זמנית.

למרות החששות שדירקטורים המשמשים במספר רב של מועצות מנהלים יתקשו למצוא זמן לשרת את כולן, מעוניינות מרבית החברות שהדירקטורים שלהן ירכשו ניסיון, ידע ואולי גם לגיטימציה, מעצם כהונתם גם במועצות מנהלים אחרות. יותר מכך, קל יותר לחברה לבחור דירקטור שמכהן כבר במספר חברות (ויפים דברים אלה, בהתאמות המתחייבות, גם לעניינם של רואי חשבון ועורכי דין), שכן (למעט אם מדובר ב"מפל אינפורמציה") הסכנה של "טעות בבחירה" קטנה יותר וגם במקרה של, חלילה, כשל של אותו דירקטור, סבירות הבחירה בו תהיה ברורה לאור כך שגם אחרים בחרו בו ולאור התנהלותו בדירקטוריונים אלה.

עם זאת, נושא הקדשת הזמן אינו עניין של מה בכך. פרופ' גרוס מנתח עניין זה בהרחבה בספרו וקובע כי הן הניסיון והן מחקרים מלמדים ש"דירקטורים רבים מתרוצצים משיבה לשיבה או אינם מופיעים כלל לשיבות, ואינם מקדישים זמן לחברה שאת מדיניותה הם אמורים להתוות".

לא יהיה זה בלתי סביר להניח כי דירקטורים מיישמים את הידע והניסיון אותם הם רוכשים במועצת מנהלים אחת כדי להתמודד עם שאלות וסוגיות המוצגות להם או הנקרות על דרכם

¹³ סעיף 256 לחוק החברות.

במועצת מנהלים אחרת. אכן, חובות האמונים והזהירות מתורגמות גם לציווי של סודיות, אך דירקטורים רבים אינם רואים פסול בשימוש באותם **עקרונות חשיבה** במועצות מנהלים שונות. לשון אחר, רעיונות עסקיים-חשבונאיים, רעיונות של בקרה וניהול סיכונים אינם נתפסים כ"קניין רוחני" של חברה זו או אחרת, ולכן לא פעם מועברים על ידי דירקטורים ואחרים בין חברות, לעיתים, תוך הדגשה כי כך נוהגים בחברות אחרות כדי להקנות לגיטימציה נוספת לרעיון.

הנה כי כן, הרשת **המשולבת** של חברי מועצת מנהלים ממלאת תפקיד חשוב בהתנהלותן של חברות בתחומי החשבונאות, המימון, המשפט, הבקרה, המס וגם בעסקים.

אם נשוב לדוגמא בה פתחנו, דוגמת ה- Backdating, ברור כעת כי מודל רשת הדירקטורים יכול לענות על אחת השאלות הקשות אשר עולה במציאות של השנים האחרונות: כיצד מספר כה גדול של חברות ביצעו את פעולת ה- Backdating, בעת ובעונה אחת, שעה שפעולה זו לא הייתה הכרח הנגזר מפעילות עסקית.

הדברים אינם חדשים. בספרות האקדמית קיימים מחקרים לא מעטים, בחלקם מלפני שנים רבות, שעסקו בתופעה נשוא מחקרנו, היינו, ב- **INTERLOCKING FIRMS**, פירמות שחולקות דירקטור משותף אחד או יותר. מאמרים אלה מציעים הסברים מפורטים ומגוונים לעצם קיומה של תופעה זו ועוסקים בהשלכותיה על ממשל תאגידי, מבנה עסקים, תגמול מנהלים ועוד.

כך למשל, במאמר מעניין, ראה :

Non, Marielle C. and Franses, Philip Hans, "Interlocking Boards and Firm Performance: Evidence from a New Panel Database" (March 29, 2007). Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=978189>

נסקרת התופעה של דירקטורים משותפים והשלכותיה :

"There are several views on the origin and effect of interlocks, see Mizruchi (1996) for an extensive review. Here we mention four well-known views.

The first is that interlocks are a way for firms to coopt and/or monitor each other (Dooley, 1969 and Mizruchi and Stearns, 1994). The second view states that interlocks provide firms with information on business practice (Davis, 1991). The third is that interlocks merely reflect upper-class cohesion (Useem, 1984). And, fourth, the recently put forward busyness hypothesis of Ferris et al. (2003) states that multiple directorships place an excessive burden on directors (see also Fich and Shivdasani, 2006). The first two views predict a positive influence of interlocks on firm performance. In contrast, the busyness hypothesis predicts a negative influence on firm performance. Finally, the effect of interlocks can be either positive, negative or neutral when interlocks reflect upper-class cohesion. So, only the upper class cohesion theory and the busyness hypothesis can explain a negative effect of interlocks on performance, the other two views predict a positive effect.”

מסקנתם היא :

“In this study we explored the effect of interlocks on firm performance for The Netherlands during 1994 to 2004 while using a new and detailed panel database. We find a small negative effect that occurs with a lag. There are two hypotheses that could explain a negative effect, and these are the busyness hypothesis and an upper class cohesion hypothesis. We find empirical support for both hypotheses. Firms with more busy directors on their board perform worse, supporting the busyness hypothesis. For the upper class cohesion hypothesis we find that there is an optimal percentage (20%-40%) of upper class directors in the board. We believe that these findings have strong managerial implications.”

היינו, מסקנת המחקר היא כי דירקטורים עסוקים מידי, כמאופיין על ידי היותם מרובי דירקטוריונים, פוגעים בביצועי החברה (ראה בספרו של פרופ' גרוס על אילוץ הזמן ופתרונות עקיפים שונים לו).

בדומה, דירקטוריון המורכב מדירקטורים הנמנים על אותה "קבוצת עילית", הנפגשים בחדרי דירקטוריונים של לא מעט חברות, בכנסים מקצועיים, במפגשים חברתיים וכו', ואשר יש להם רקע השכלתי ואישי דומה, עלול להזיק לחברה אם משקלם של אלה יהיה מכריע. זאת, מן הטעם שגיוון (DIVERSITY) הוא אלמנט המשפר קבלת החלטות של קבוצה.

נושא חשוב זה, של "**COLLECTIVE WISDOM**" זכה לאחרונה להתייחסות בספרים מקיפים. תוצאה מעניינת אופיינית מופיעה במחקר תיאורטי של:

Lu Hong and Scott E. Page Groups of diverse problem solvers can outperform groups of high-ability problem solvers PNAS 2004 101: 16385-16389

הקובע:

The main result of this paper provides conditions under which, in the limit, a random group of intelligent problem solvers will outperform a group of the best problem solvers. Our result provides insights into the trade-off between diversity and ability. An ideal group would contain high-ability problem solvers who are diverse. But, as we see in the proof of the result, as the pool of problem solvers grows larger, the very best problem solvers must become similar. In the limit, the highest-ability problem solvers cannot be diverse.

היינו, קבוצה של "פותרי בעיות" אינטליגנטיים יכולה להיות יעילה יותר בפתרון בעיה מאשר קבוצה של מומחים. דומה שהשימות של מחקרים אלה לעולם הדירקטורים היא ברורה. דירקטורים "דומים" מדי, היינו-הנמנים על אותה "קבוצת עילית", המצוידים בכישורים דומים, גם אם מעולים, המסתובבים באותם עולמות, עלולים לתפקד טוב פחות מאשר קבוצה של אנשים אינטליגנטיים. ממצאים מעין אלה צריכים להילקח בחשבון בעת שהמחוקק שוקל הטלת דרישות כשירות ומיומנות אחידות על חברי דירקטוריון. למשל, ועל דרך ההגזמה, דרישה שכל מושבי הדירקטוריון יהיו מאוכלסים רק ב"דירקטורים פיננסיים" (רואי חשבון, למשל) תועיל אולי לרמת החשבונאות בדוחות הכספיים, אך ספק אם ביצועיה של החברה יהיו

כה טובים, בהעדר גיוון. ממצאים אלה רלבנטיים גם לענייננו: ככל שהדירקטוריונים "מקושרים" יותר משמעות הדבר שההטרונות, בהשוואה בין דירקטוריונים, נמוכה יותר. ולכן, בעיות שצריכות להיפתר "משקית", על ידי פעולה מקבילה של דירקטוריונים, כגון בעיות בקרה וחשבונאות, עלולות להיפתר טוב פחות.

מחקר מעניין אחר¹⁴ מצביע דווקא על שינויים, שחלו לאחרונה, בהיקף הכהונה המשותפת של דירקטורים. וכך, קובעים כי בשנים האחרונות, גם בעקבות הסקנדלים החשבונאיים בארה"ב, פחתה התופעה של דירקטורים המשרתים בו זמנית במספר דירקטוריונים וגם פחתה כמות הדירקטוריונים בהם דירקטור משרת.

לשון אחר, נראה, לפחות על פי מחקר זה, כי התופעה של INTERLOCKING BOARDS נתפסת כתופעה פחות רצויה מזווית הראיה של "ממשל תאגידי".

בלשונם (ההדגשה-שלנו):

We study changes in board characteristics in U.S. public firms between 1997 and 2003. During that period boards become smaller and more independent, **there are fewer cases of interlocking directorships and a decrease in multiple directorships**. We also find changes in director background: an increase in the number of directors with financial background and a decrease in the number of directors with industrial background. Some of the changes occur already between 1997 and 2000. However, we find larger changes between 2000 and 2003, in conjunction with the corporate scandals and the new governance rules. We find little change in the financial stake of independent directors and in separating CEOs from the chairman position.

Chhaochharia, Vidhi and Grinstein, Yaniv, "The Transformation of US Corporate¹⁴ Boards: 1997-2003" (May 2004).

מחקר מעניין אחר של:

Fich, Eliezer M. and Shivdasani, Anil, "Financial Fraud, Director Reputation, and Shareholder Wealth" (April 17, 2006). AFA 2006 Boston Meetings Paper Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=687412>

מצביע על תופעה מרתקת לפיה בחברות שכשלו בפלילים, הכתם דבק גם בדירקטורים ועובר דרכם לחברות אחרות בהן הם משרתים. בלשונם:

"We show that a contagion effect exists for financial fraud through the board of directors. Firms that share directors with other boards accused of fraud are more likely to face fraud allegations themselves. When a firm faces a fraud class action lawsuit, other firms that employ outside directors of the defendant firm also experience a significant decline in valuation. Both these effects increase with the severity of the fraud allegation as measured by subsequent SEC enforcement actions and settlement amounts. The valuation loss for the interlocking firms is magnified if these firms possess weak governance characteristics and if the interlocked directors play a potentially critical role in influencing the likelihood of fraud due to their status as a member of the audit committee of either the fraud or the interlocked firm, or as the CEO of the interlocked firm."

אנו סבורים כי במחקר מעניין זה יש להצדיק את דרישת הגילוי הקבועה בתקנה 26(א)(9) לתקנות ניירות ערך (דוחות תקופתיים ומידיים), התש"ל-1970, ובתקנה 45(א)(9) לתקנות ניירות ערך (פרטי התשקיף וטיוטת תשקיף - מבנה וצורה), התשכ"ט-1969, לפיה בפירוט הניתן על כל דירקטור יפורטו, בין היתר, גם התאגידים האחרים שבהם הוא משמש דירקטור.

ייתכן שטוב יהיה אילו הבורסה לניירות ערך בתל אביב תפרסם באתר האינטרנט שלה מנוע חיפוש המאפשר ניווט ברשת הדירקטורים. מנוע מעניין כזה לעולם הדירקטורים בישראל ניתן למצוא ב-<http://www.hasholtim.com>.

אגב, לחובבי הקולנוע מבין קוראי מאמר זה (היש כאלה?) כדאי לבקר באתר <http://oracleofbacon.org>. מנוע החיפוש באתר זה מוצא את הקשר בין כל שחקן בהוליווד לשחקן **קווין ביקון**. נושא הרבה יותר נחמד מאשר הנושא של קשר בין דירקטורים.

אנחנו חיפשנו את המרחק מקווין ביקון של **ריצ'רד גיר ודברה וינגר**, ששיחקו יחד בסרט "קצין וג'נטלמן" (סרט באמת חשוב מאוד, שכן שיר הנושא בסרט זה, LOVE LIFT US UP, WHERE WE BELONG, שימש כשיר ה"סלואו" בחתונתם של ג'יל ואייל סולגניק), ומצאנו:

Richard Gere has a Bacon number of 2.

Richard Gere was in Sommersby (1993) with Maury Chaykin

Maury Chaykin was in Where the Truth Lies (2005) with Kevin Bacon

Debra winger has a Bacon number of 2.

Debra Winger was in Eulogy (2004) with John Lafayette

John Lafayette was in Loverboy (2005) with Kevin Bacon

היינו, האלגוריתם לא "הלך" בדרך הפשוטה וקבע לאחד מהם (גיר למשל) "מספר ביקון" 2 ולאחר (דברה ווינגר) "מספר ביקון" 3 אלא חיפש את המסלול הקצר ביותר, והשונה, מכל אחד מהם לקווין ביקון.

מעניין לציין כי שם אחר שהיקשנו הוביל לתוצאה מעניינת, אותה נראה גם בעבודה זו, לפיה:

About 12% of all actors cannot be linked to the rest of the movie universe, either because they have appeared only in video games or straight-to-video releases that the Oracle doesn't count, or because they have not appeared in any films with actors from the Hollywood mainstream.

הבחירה בקווין ביקון אינה מקרית. ביקון נחשב כמצוי באזור מרכז הרשת של השחקנים (אף כי כמודגם להלן, יש כאלף מרכזי רשת טובים ממנו). היינו, כשחקן שהמרחק הממוצע שלו משחקנים אחרים הוא מהקצרים ביותר.

לעניין זה, מעניין להביא קצת מהציטוטים מן האתר, השופכים אור על הטופולוגיה של רשת השחקנים:

Who is the Center of the Hollywood Universe?

By processing all of the nearly 800,000 people in the Internet Movie Database I discovered that there are currently 1048 people who are *better* centers than Kevin Bacon! What does it mean for one person to be a "better" center than another? Consider the following breakdown of people by Bacon Number (as of June 29, 2004):

Bacon Number	# of people
0	1
1	1806
2	145024
3	395126
4	95497
5	7451
6	933
7	106
8	13

That means that there is 1 person who can be linked in 0 steps (Bacon himself), 1806 people who can be linked in 1 step, 145024 people who can be linked in 2 steps, etc. So we can compute the *average* Bacon Number as follows:

$$\begin{aligned} & ((0*1)+(1*1806)+(2*145024)+(3*395126)+(4*95497)+(5*7451)+(6*933)+(7* \\ & 106)+(8*13)) / (1+1806+145024+395126+95497+7451+933+106+13) \\ & = 1902919 / 645957 \end{aligned}$$

= 2.946

So the average Bacon Number is about 2.946. We can compare that with the average Connery Number for actor Sean Connery. The breakdown is as follows (as of June 29, 2004):

Connery Number	# of people
0	1
1	2272
2	218560
3	380721
4	40263
5	3537
6	535
7	66
8	2

By computing the average of these numbers we see that the average Connery Number is about 2.731 making Connery a better center than Bacon. This is not to denigrate Mr. Bacon, and it should be noted that being the 1049th best center out of nearly 800,000 people makes Bacon a better center than 99% of the people who have ever appeared in a feature film.

אתר מעניין נוסף (<http://www.oakland.edu/enp>), מפורסם, הוא זה העוסק בגרפים של שיתוף פעולה מדעי COLLABORATION GRAPHS ובמספרי ERDOS. ארדש היה מתמטיקאי ענק, שעסק, בין היתר, בתחומים של תורת המספרים, קומבינטוריקה, תורת הגרפים ועוד. ארדש בלט לא רק באיכות תוצאותיו אלא גם בכמות מאמריו והוא אחד מהמתמטיקאים הפוריים ביותר בהיסטוריה האנושית. לחוקרים שכתבו עם ארדש מאמר משותף יש מספר ארדש 1. למי שכתב עימם-יש מספר ארדש 2. וכך הלאה.

כך למשל, לביל גייטס יש מספר ארדש 4. לדיויד הילברט, שנפטר בשנת 1943, שנים רבות לפני שארדש נפטר, יש מספר ארדש 3.

להלן מספרי ארדש של זוכים מפורסמים בפרס נובל בכלכלה:

Paul A. Samuelson	1970	Economics	5
Kenneth J. Arrow	1972	Economics	3
Tjalling C. Koopmans	1975	Economics	4
Herbert A. Simon	1978	Economics	3
Gerard Debreu	1983	Economics	3
Franco Modigliani	1985	Economics	4
Robert M. Solow	1987	Economics	4
Harry M. Markowitz	1990	Economics	2
Merton H. Miller	1990	Economics	4
John C. Harsanyi	1994	Economics	8
John F. Nash	1994	Economics	4
Reinhard Selten	1994	Economics	7
James Mirrlees	1996	Economics	3
Robert C. Merton	1997	Economics	6
Amartya Sen	1998	Economics	4
James J. Heckman	2000	Economics	4
Joseph Stiglitz	2001	Economics	4

פרופ' נוגה אלון, **היועץ המתמטי שלנו בעבודה זו**, מבית הספר למתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, הוא בעל מספר ארדש 1!

נוגה אלון "קיבל" מספר זה כבר בשנת 1985, בשל מאמר ראשון משותף שלו עם ארדש :

N.Alon and P. Erdős, An application of graph theory to additive number theory, European J. Combinatorics 6 (1985), 201-203.

אגב, מחקר שפורסם לאחרונה ממקם את פרופ' נוגה אלון במרכז הרשת של החוקרים בתחום מדעי המחשב.

לאייל סולגניק יש מספר ארדש 6 או אולי קטן יותר. שכן, **אייל סולגניק** כתב מאמרים עם **יצחק זילכה** (שהנחה אותו בדוקטורט). יצחק זילכה פרסם עם **בצלאל פלג**. בצלאל פלג פירסם עם **רונרט אומן**. לאומן, זוכה פרס נובל בכלכלה, יש, לפי הטבלה לעיל, מספר **ארדש** 3. לכן, לאייל סולגניק יש מספר ארדש 6, או קטן יותר אם יש נתיב יותר קצר בינו לבין ארדש.

זה אולי המקום להעיר הערה טריביאלית אך חשובה: המרחק של אייל סולגניק מארדש, ברשת שיתוף הפעולה המדעי הוא 6 (לפחות בינתיים, עד שאולי ימצא מסלול קצר יותר). לעומת זאת, ברשת של החברה האנושית (זו שבחן MILGRAM), אילו ארדש היה חי, היה מרחקו של אייל ממנו 2 בלבד. שכן, אייל **מכיר** את נוגה אלון **שמכיר** את ארדש. לשון אחר, למרות שבחברה האנושית כולה יש "שש דרגות הפרדה" אין להתפלא שברשתות ספציפיות, הדורשות דרישה מהותית כדי שיתקיים קשר, מספר דרגות הפרדה הוא גדול משש.

לדוגמא, ברשת של שיתוף הפעולה המתמטי מתקיים הכלל של 8 דרגות הפרדה. היינו :

Based on a sample of 100 pairs of vertices in this component, the average distance between two vertices is around 7.64 (between 7.41 and 7.87 with 95% confidence), with a standard deviation of about 1.19. The median of the sample was 7, with the quartiles at 6 and 8. The smallest and largest distances in the sample were 4 and 11, respectively.

אנו מפנים את תשומת הלב למתודה של **דגימה** ששימשה להגעה למסקנה.

רשת שיתוף הפעולה המדעי המתמטי מעניינת וניתן לקבל ממנה תובנות חשובות על רשתות חברתיות, הגדלים האופייניים בהן, ועל המבנה של גרפים של שיתוף פעולה, שנהנים ממבנה דומה לרשת הדירקטורים, אף כי התהליך הדינאמי העומד בבסיס הגרפים אינו בהכרח דומה.

להלן מספר נתונים נוספים על רשת מעניינת זו:

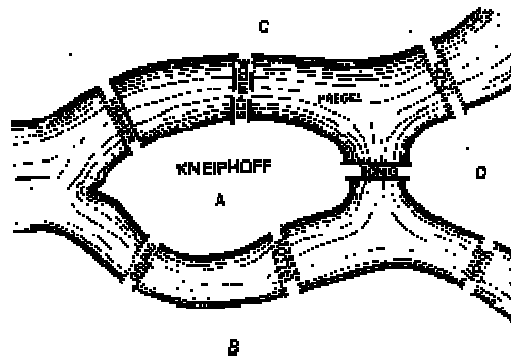
1. There are about **1.9 million authored items** in the Math Reviews database, by a total of about **401,000 different authors**.
2. **Approximately 62.4% of these items are by a single author, 27.4% by two authors, 8.0% by three authors, 1.7% by four authors, 0.4% by five authors, and 0.1% by six or more authors.**
3. **The fraction of items authored by just one person has steadily decreased over time, starting out above 90% in the 1940s and currently standing at under 50%.**
4. Let B be the bipartite graph whose vertices are papers and authors, with an edge joining a paper with each author of that paper. Then B has about **2.9 million edges**. The **average number of authors per paper is 1.51**, and the **average number of papers per author is 7.21**. The median is 2, the mean is 7.21, and the standard deviation is 18.02. It is interesting (for tenure review committees?) to note that the 60th percentile is 3 papers, the 70th percentile is 4, the 80th percentile is 8, the 90th percentile is 18, and the 95th percentile is 32. Indeed, **over 42% of all authors in the database have just one paper.**

5. There are **four authors with more than 700 papers**: Paul Erdős with 1416 (he actually wrote more papers than that, but these are just the ones covered by Math Reviews), Drumi Bainov with 823, SAHARON SHELAH with 760, and Leonard Carlitz with 730. Bainov's Erdős number is 4, SHELAH's is 1, and Carlitz's is 2. The other mathematicians with more than 500 papers listed in MathSciNet (and their Erdős numbers) are Hari M. Srivastava (2), Lucien Godeaux (infinite — actually he wrote only one joint paper), Ravi Agarwal (3), Edoardo Ballico (3), FRANK HARARY (1), Josip E. Pecaric (2), Owa Shigeyoshi (3), and Richard Bellman (2). The most prolific authors listed in the DBLP (dealing with computer science publications) can be found on a list at their website (DBLP), which is definitely worth exploring.
6. The **collaboration graph C** has the roughly 401,000 authors as its vertices, with an edge between every pair of people who have a joint publication.
7. The entire graph has about **676,000 edges**, so the **average number of collaborators per person is 3.36**. In C there is **one large component consisting of about 268,000 vertices**. Of the remaining 133,000 authors, **84,000 of them have written no joint papers** (these are **isolated vertices** in C). The average number of collaborators for people who have collaborated is 4.25; the average number of collaborators for people in the large component is 4.73; and the average number of collaborators for people who have collaborated but are not in the large component is 1.65.

3. הכרות קצרצרה עם תורת הגרפים

עבודתנו זו מחייבת הכרות אלמנטרית עם תורת הגרפים-תחום אשר התפתח במאות השנים האחרונות, ואשר העבודה הראשונה בו נחשבת "בעיית שבעת הגשרים של קניסברג" אותה פתר המתמטיקאי הדגול אוילר. להלן ציטוט הבעיה מתוך האתר http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/graphs.shtml

The problem is stated as follows:



In the town of Königsberg in Prussia (nowadays a city of Kaliningrad in Russia, comment is mine, CTK) there is an island A, called "Kneiphoff", with the two branches of the river (Pregel) flowing around it. There are seven bridges, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, and *g*, crossing the two branches. The question is whether a person can plan a walk in such a way that he will cross each of these bridges once but not more than once. I was told that while some deny the possibility of doing this and others were in doubt, there were none who maintained that it was actually possible. On the basis of the above I formulated the following very general problem for myself: Given any configuration of the river and the branches into which it may divide, as well as any number of bridges, to determine whether or not it is possible to cross each bridge exactly once.

אוילר תירגם את הבעיה לגרף פשוט, בו האדמה היא הקודקודים והגשרים הם צלעות. לגבי גרף זה הראה אוילר כי אין בו מסלול אוילריאני העובר כל צלע פעם אחת בלבד. היינו, בעיית הגשרים שהוא הציג אינה פתירה.

גרף הוא יצור שניסוחו פשוט אך גם ניסוח פשוט זה הוליד תוצאות עמוקות ביותר.

גרף מורכב משני סוגי אלמנטים: קודקודים (VERTICES) וצלעות (EDGES) המחברות בין חלק מהקודקודים. אנו נתעניין בגרפים פשוטים: בהם כל שני קודקודים מחוברים, אם בכלל, באמצעות צלע אחת וכן בהם אף קודקוד אינו מחובר לעצמו.

קודקוד בגרף מסומן כנקודה ואילו צלע כקשת או קו ישר (ואין לצורה הגיאומטרית חשיבות לענייננו). מספר הקודקודים בגרף נקרא הסדר (ORDER) של הגרף ומספר הצלעות נקרא הגודל (SIZE) של הגרף.

המחקר החשבונאי והפיננסי טרם עיכל את עוצמתם של כלים מתורת הגרפים לפתרון סוגיות רלבנטיות. במובן זה, אנו מקווים שמחקרנו מספק הדגמה רלבנטית לעניין זה. כדי להבין ולו מקצת עוצמתה של תורת הגרפים, צריך לזכור כי ניתוח באמצעות גרפים יכול להופיע גם במקומות בלתי צפויים. למשל, בהבנת רשתות טרור.

תורת הגרפים, כמו גם תורות מתמטיות אחרות, משמשת בניתוח ובהבנה של רשתות טרוריסטים ופיצוחן. שאלה מעניינת העולה בהקשר של רשתות טרוריסטים (וגם להבדיל באלפי הבדלות בניתוח רשתות כלכליות, לרבות רשת הדירקטורים) הינה: "כמה מהם צריך לסלק עד שהרשת תיפרד, ולכן תהיה פחות אפקטיבית". תשובה מעניינת, המשתמשת בתורת השריגים (LATTICE THEORY) ניתנה על ידי המתמטיקאי FARLEY, במאמרו:

Breaking Al Qaeda Cells: A Mathematical Analysis of Counterterrorism Operations (A Guide for Risk Assessment and Decision Making) Published in: Studies in Conflict & Terrorism, Volume 26, Issue 6 November 2003, pages 399 - 411

ובתמצית:

How can we tell if an Al Qaeda cell has been broken? That enough members have been captured or killed so that there is a high likelihood they will be unable to carry out a new attack, and military resources can be

redirected away from them and toward more immediate threats? This article uses order theory to quantify the degree to which a terrorist network is still able to function. This tool will help law enforcement know when a battle against Al Qaeda has been won, thus saving the public's money without unduly risking the public's safety.

אף שכמובן **אין** כל דמיון בין טרוריסטים לדירקטורים!!!, המבנה המתמטי הדומה של הרשתות, מלמד כי שאלות דומות יכולות להישאל ולקבל תשובות מעניינות בכלים של תורת הגרפים. כך למשל, ניתן לשאול כמה דירקטורים (ומה מאפייניהם) צריך להוציא מרשת הדירקטורים כדי להפריד אותה למספר רכיבי קשירות (קומפוננטים).

זוהי זווית ראייה חשובה למקבלי החלטות בשוק ההון, בעיקר לרגולטורים. נניח שבמדינה מסוימת נשקלת האפשרות להטיל מגבלה על הכמות המרבית של דירקטוריונים (בחברות שאינן בשליטה אחת: היינו, חברות שאינן נמצאות בקשר של אם-בת או מחזיקה-כלולה או קשר של השתייכות לאותה קבוצת שליטה) בהן יכול דירקטור אחד לכהן. יש שיקולים לא מעטים בקביעת המספר המרבי, אך אנו סבורים שקביעת ההגבלה כזו צריכה לקחת בחשבון, במידה רבה, את ההשפעה על רמת הקישוריות ברשת.

זאת ועוד, נניח שלגבי עולם הדירקטורים בישראל, יתברר כי הוצאה של **כמות מאוד קטנה** של דירקטורים מהרשת תביא להפרדה של הגרף הקשיר (או של רכיב הקשירות הנבחר) לשני רכיבי קשירות **גדולים** נפרדים. מידע כזה ילמד אותנו כי **עוצמת הקישוריות** ברשת היא חלשה יחסית וכי ממסרים של אינפורמציה ושל העברת "וירוסים חשבונאיים" אינם חזקים. זוהי בשורה טובה לרגולטורים שחשש תמידי שלהם הוא שכשל בחברה אחת "ידביק" חברות אחרות.

נושא הקשירות הוא נושא אשר לגביו קיימות תוצאות מתמטיות מעניינות ביותר. אחת הבסיסיות, אך החשובות שבהן, היא משפט MENGER משנת 1937 שאומר, בלשון פשוטה, כי כמות הדירקטורים **המינימלית** שצריך "לסלק" על מנת להפריד בין דירקטור A לדירקטור אחר B ברשת שווה למספר הגדול ביותר של מסלולים בלתי תלויים בין A לבין B. לעניין זה, שני מסלולים ייקראו בלתי תלויים אם למעט A ו-B אין להם דירקטורים משותפים אחרים.

לדוגמא, נניח ש"יצחק" ו"אייל" הם שני דירקטורים ברשת. נניח שכדי שלא יהיה קשר ביניהם, דרך מסלולי הכרויות, צריך "לסלק" מהרשת שני דירקטורים "יוסי" ו"רינה". משפט MENGER מבטיח לנו בנסיבות אלה כי בין "אייל" ו"יצחק" היו רק שני מסלולים בלתי תלויים.

BRAMS, אחד המוחות האקדמיים הפוריים יותר במחקר בתחומי מדעי המדינה, פוליטיקה ועוד, השתמש אף הוא, יחד עם שותפים למאמר, בתורת הגרפים (גרפים מכוונים, DIRECTED GRAPHS, שלא כבמאמר זה) על מנת ללמוד רשתות טרוריסטים. כדבריו בתמצית המאמר:

A methodology for converting terrorist networks from undirected graphs to simplified directed graphs (or digraphs), and mapping the flow of influence in them, is described. It is based on an "influence assumption" - that important persons with more links influence less important persons with fewer links. This methodology, which was previously used to analyze the structure of influence relationships in Communist-bloc countries and the international system, is illustrated by its application to two terrorist networks constructed after 9/11. In the second more complex network, the hierarchy sheds light on the leadership and likely terrorist cells embedded in the network. Refined data and alternative assumptions about influence could provide additional insights into the structure of terrorist networks.

את המאמר ניתן למצוא באתר האינטרנט של BRAMS, ראה:

<http://politics.as.nyu.edu/object/stevenbrams.html>

תחת השם:

"Influence in Terrorist Networks: From Undirected to Directed Graphs" (with Hande Mutlu and Shawn Ling Ramirez)

3. מהי רשת דירקטורים?

הספרות האקדמית, העוסקת בתורת הגרפים, מציעה שורה של אפשרויות למידול, באמצעות גרף, של עולם הדירקטורים. דרך אחת, היא לראות כל דירקטור כקודקוד בגרף. צלע המחברת בין שני קודקודים תהיה קיימת מקום בו הדירקטורים חולקים דירקטוריון משותף (אחד לפחות).

ברשת הדירקטורים, על פי גישה זו, כל קודקוד הינו דירקטור המחובר (מקושר) עם כל הדירקטורים היושבים איתו באותה מועצת מנהלים.

דירקטור מקבל סימון של נקודה בגרף. האוסף של כל הדירקטורים בכל החברות, יוצר אוסף של נקודות בגרף. דירקטור המכהן בשתיים או יותר מועצות מנהלים שונות, מקבל נקודה אחת בלבד, אך הוא מחובר (מקושר) בקו עם כל אחת מהנקודות (הדירקטורים) הנמצאים איתו באותה מועצת מנהלים בחברה אחת לפחות.

דרך אחרת, היא להסתכל על עולם הדירקטורים, כך שכל קודקוד הינו מועצת מנהלים. בין שתי מועצות מנהלים, שהן המהוות את הקודקודים בגרף, מחברת צלע אם הדירקטוריונים הללו חולקים לפחות דירקטור אחד במשותף.

דרך שלישית, ממנה ניתן לגזור את שתי הדרכים הראשונות, היא להסתכל על עולם הדירקטורים באמצעות גרף שהוא BIPARTITE. בגרף זה יש שתי אוכלוסיות של קודקודים: קודקודים המייצגים דירקטורים וקודקודים המייצגים דירקטוריונים. בגרף זה, הצלעות מחברות בין שתי האוכלוסיות אך אינן מחברות בין שני קודקודים באותה אוכלוסיה. היינו, צלע תחבר בין דירקטור לדירקטוריון אם הדירקטור חבר בדירקטוריון. מגרף זה ניתן לקבל את הגרפים האחרים, תוך הבנה שיש להתעלם מחיבור שני קודקודים באמצעות יותר מקשת אחת.

בעבודה זו אימצנו את החלופה הראשונה, לפיה כל דירקטור הוא קודקוד בגרף, וחיבור בין שני קודקודים קיים מקום בו הם חולקים דירקטוריון אחד לפחות.

קישורים - כל דירקטור מחובר בקו עם כל הדירקטורים איתם הוא יושב באותה מועצת מנהלים. לדוגמה, בחברה בה אחד עשר דירקטורים ישנן אחת עשרה נקודות (אחת עבור כל

דירקטור) וחמישים וחמישה קווים המקשרים ביניהם (מכל אחד מאחד עשר הדירקטורים יוצאים עשרה קווים לכל אחד מעשרת חבריו במועצת המנהלים - כל חיבור הוא דו-כיווני ולכן סה"כ יש $55 = 10 / 2 * 11$ חיבורים שונים).

בהמשך לדוגמה, נניח כעת, כי ישנה חברה נוספת, בה יושבים חמישה דירקטורים במועצת המנהלים, אחד מהם בלבד מכהן גם במועצת המנהלים של החברה הראשונה. כעת יהיו בגרף חמש עשרה נקודות (אחת עשרה מהחברה הראשונה, וחמש מהחברה השנייה, פחות דירקטור אחד שנספר פעמיים) ושישים וחמישה קווים המחברים ביניהם (חמישים וחמישה המחברים את הדירקטורים של החברה הראשונה בינם לבין עצמם, ועשרה המחברים את הדירקטורים של החברה השנייה בינם לבין עצמם¹⁵). אילו לא היה דירקטור משותף, והעולם היה מורכב מ-15 דירקטורים, 11 בדירקטוריון אחד ו-4 בשני, מספר הצלעות בגרף היה 61 בלבד.

עניינו של מאמר זה, כמובהר בהרחבה בפרקים הקודמים, הנו גם בבחינה של השאלה האם עולם הדירקטורים בישראל הוא "עולם קטן". מאפיינים קריטיים של "עולם קטן" הם פרמטרים שונים של המרחק בין הקודקודים השונים: סך המרחק, ממוצע המרחק ועוד. לכן, נגדיר כעת פונקציות שונות של מרחק.

בהינתן רשת הדירקטורים, נגדיר כי המרחק בין שני דירקטורים באותה חברה הוא קבוע (מרחק של יחידה), ואין זה משנה מה מידת הקרבה האישית בין הדירקטורים או אף מה מספרן של מועצות המנהלים המשותפות בהן הם מכהנים כדירקטורים¹⁶. אנו סבורים שיהיה מקום בעתיד להתבונן בגרפים מורכבים יותר, בהם יינתן ביטוי ליחסי כפיפות (גרפים מכוונים) ולעוצמת קשר בין דירקטורים. (בספרות המחקרית החלו להתפרסם עבודות המתייחסות לכך- ראה בהמשך).

בדוגמה שלעיל, המרחק בין כל שני דירקטורים משתי חברות שונות (מלבד הדירקטור המשותף, הקשור לכל דירקטור אחר במרחק של יחידה אחת) הוא שתי יחידות. בהיבט של דירקטורים, מרחק יכול להתפרש, כמספר הטלפונים אשר דירקטור בחברה הראשונה צריך לבצע על מנת ליצור קשר, עם תשתית של היכרות, עם הדירקטור מהחברה השנייה. במקרה זה, התקשורת תעבור דרך הדירקטור המשותף ולא במישרין, ולכן המרחק הוא 2.

כאשר ניצור את רשת הדירקטורים סביר להניח כי ייווצר מצב בו לא כל הרשת מחוברת. היינו, כי יהיו דירקטורים ברשת אשר לא יהיו מחוברים ביניהם.

¹⁵ הדירקטור המשותף מחובר עם כל ארבעה עשר הדירקטורים האחרים ואין קו המחבר את הדירקטור עם עצמו.

¹⁶ המרחק בין כל דירקטור לעצמו יוגדר כ-0 יחידות.

לדוגמה, חברה בה מכהנים שלושה דירקטורים אשר כל אחד מהם מכהן אך ורק בחברה זו. מצב זה יצור כי כל אחד משלושת הדירקטורים מחובר במרחק של יחידה עם שני חבריו לחברה, אך לא מחובר כלל ליתר הדירקטורים (המרחק בין דירקטור בחברה לדירקטור אחר ברשת יוגדר כאינסופי, משום שלא ניתן להגיע במספר סופי של צעדים מדירקטור אחד לשני).

כל חלק בגרף ממנו ניתן להגיע בעזרת מספר סופי של קישורים מנקודה לנקודה בתוכו ייקרא רכיב קשירות, או בלעז, "קומפוננט". היינו, תת הגרף המקושר הגדול ביותר ביחס להכלה. ראינו תופעה זו, של שחקנים שאינם מקושרים, גם ברשת הענקית של שחקני הקולנוע שם היה מדובר בכ-12% מהשחקנים. אגב, ייתכן ששחקן שאינו ברשת הופיע בסרטי ווידאו רבים, אך כל עוד לא שיחק עם שחקן אחר מה MAINSTREAM הוא לא מקבל "מספר ביקון".

סדר רכיב הקשירות, ה"קומפוננט", הינו מספר הדירקטורים השונים הנמצאים בו (כל דירקטור נספר רק פעם אחת אפילו אם הוא מכהן בשתיים או יותר מועצות מנהלים).

סביר להניח כי ברשת הדירקטורים יהיו מספר רכיבי קשירות. כל רכיב קשירות מהגדרתו, אינו מחובר לאחרים, כלומר אין אף זוג דירקטורים המכהנים במשותף באותה מועצת מנהלים אם הם שייכים לשני רכיבי קשירות שונים.

בשל מספר החיבורים הגדול בין הדירקטורים סביר להניח כי אחד מרכיבי הקשירות יהיה גדול (המכיל מעל לרוב ממספר הדירקטורים) ויתר רכיבי הקשירות יהיו קטנים (בדרי"כ יכללו דירקטורים של חברה אחת או שתיים). ראה לעניין זה:

Bollobás (2001) or Alon & Spencer (2000).

רכיב הקשירות הגדול ביותר הוא המעניין אותנו.

ניתוח בתוך רכיבי הקשירות הקטנים אינו מעניין ולכן נתייחס במחקר זה לרכיב הקשירות הגדול ביותר בלבד¹⁷.

¹⁷ מעתה, המושג "גרף הדירקטורים" יתייחס לגרף שיוצר רכיב הקשירות הגדול ביותר (אלא אם צוין אחרת).

א. הגדרות, מונחים וחישובים בסיסיים

דירקטור - דירקטור רגיל, יו"ר הדירקטוריון, דירקטור חיצוני וכן יחיד המכהן מטעם דירקטור שהוא תאגיד. במילים אחרות, כל דירקטור ללא הבחנה במעמד משפטי או אחר. נעיר שוב, כי אנו סבורים שיהיה מקום בעתיד לעבודות המייחסות ערכים למעמד הדירקטורים, להיותם חיצוניים, בלתי תלויים (ראה ההגדרות בדו"ח וועדת גושן שפורסם על ידי רשות ניירות ערך, את הדוח ניתן למצוא באתר האינטרנט של רשות ניירות ערך), לשנות הכהונה שלהם, וכו'.

אפיון "עולם קטן" - רשת המקיימת טרנזיטיביות רשתית "גבוהה" (C גדול, ראה להלן) ומרחק "קצר" בין הקודקודים (L קצר, ראה להלן). בהקשר זה, רשת עם טרנזיטיביות רשתית גבוהה משמעה, שאם לקודקוד יש שני שכנים כלשהם, היינו-אם קודקוד מחובר לכל אחד משני קודקודים סביר כי אלה יהיו מחוברים גם בינם לבין עצמם במישרין. המונחים לעיל הושמו בין מרכאות מן הטעם שיהיה מקום לומר כיצד קובעים מהו "קצר" ומהי "גבוהה", היינו, בהשוואה למה?

נביא להלן מספר סימונים דרושים:

N - מספר הקודקודים ברשת (מספר הדירקטורים).

M - מספר החיבורים השונים בפועל בין הקודקודים.

K - (דרגת הקודקוד) מספר החיבורים השונים שיש לכל קודקוד, היינו, מספר השכנים שיש לכל קודקוד אליהם הוא מחובר בצלע.

Z - הממוצע של K עבור כל הקודקודים בגרף. הממוצע מתקבל מסכימת כל דרגות הקודקוד, עבור כל הקודקודים, מחולק במספר הקודקודים.

d - המרחק בין שני קודקודים - מספר הקישורים המינימאלי אותו נעבור על מנת להגיע מדירקטור לדירקטור. לפעמים, ניתן להגיע מקודקוד לקודקוד ביותר מדרך אחת, ולעיתים תהיה אף יותר מדרך קצרה אחת. עם זאת, החשוב לעניינינו הוא שיהיה מדובר בדרך הקצרה ביותר.

עבור כל קודקוד ניצור עץ שונה (בעזרת תוכנה) ועל פיו נחשב את המדדים הרלוונטיים. את העץ עבור הקודקוד ניצור באופן הבא: נבחר קודקוד X עבורו נרצה לבנות את העץ (הוא יוגדר ברמה 0). כל הקודקודים אליהם קודקוד X מחובר באופן ישיר יוגדרו במרחק של יחידה אחת

מקודקוד x . עבור כל הקודקודים האלו נמצא את כל הקודקודים המרוחקים במרחק יחידה ושלא הוגדרו ברמה 0 או 1 - אלו יוגדרו ברמה 2. וכך הלאה לרמות הבאות.

$N(N - 1)/2$ - מספר זוגות הקודקודים השונים ברשת.

נסמן ב- L את הסכום של כל המרחקים בין כל שני קודקודים ברשת (ונוכיר, לכל שני קודקודים אנו בוחרים את המרחק הקצר ביותר ביניהם) כשהוא מחולק במספר הזוגות האפשריים.

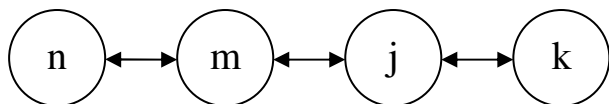
L - מייצג את המרחק הממוצע בין שני קודקודים.

כיצד, אם כך, נמדוד את הטרוניטיביות הרשתית. היינו, את המידה בה שכניו של קודקוד "מתחברים ביניהם". באנלוגיה, הטרוניטיביות הרשתית היא המידה בה חבריו השונים של אדם הם גם חברים בינם לבין עצמם. הטרוניטיביות הרשתית היא גם חלק מההסבר מדוע כן מפתיע שבעולם כולו יש בין שני אנשים כלשהם, בממוצע, "שש דרגות הפרדה". לכאורה, נניח שלאדם נתון יש 43 הכרויות (המספר האמיתי גבוה בהרבה). ולכן, הוא מכיר $43 \cdot 43$ אנשים מדרגה שנייה ו-43 בחזקה שישית מדרגה 6. סה"כ זהו מספר גדול המגיע לכ-6.5 מיליארד אנשים. וברור שדי בכך כדי לכסות את אוכלוסיית העולם כולו. הסבר פשטני זה אינו מניח את הדעת ביחס לתופעת שש דרגות ההפרדה. שכן, הוא מתעלם מהטרוניטיביות הרשתית, מכך שחבריו של אדם קשורים ביניהם. ולכן, ההעלאה בחזקה אינה נכונה במקרה הזה ונדרשים הסברים עמוקים בהרבה.

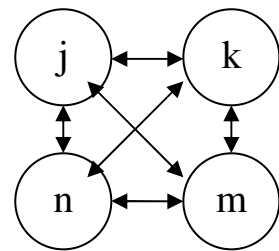
קיימים שני מדדים מקובלים, שעניינם הטרוניטיביות הרשתית, שניהם מייצרים ערכים מספריים בין 0 ל 1, אך המדדים אינם תמיד שקולים. מדד אחד, בו אנו נשתמש, מודד לגבי כל קודקוד את מספר החיבורים בפועל בין שכניו של קודקוד ביחס למספר החיבורים המרבי האפשרי ביניהם. המדד מתקבל ממיצוע הערכים ביחס לכל קודקוד. מדד שני, בו לא נשתמש, הנו מדד המתבונן על הגרף כולו ובוחר את מספר המשולשים בגרף ביחס לכל שלשות הקודקודים הקשורים ביניהם.

c_j - מספר החיבורים בין שכניו (מחוברים בדרגה 1) של קודקוד j מחולק במספר החיבורים האפשריים.

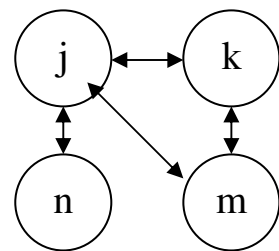
דוגמה:



בדוגמה זו C_j הוא 0. שכן ישנם שני קודקודים המחוברים באופן ישיר לקודקוד j (m -ו- k), ושניהם לא מחוברים אחד עם השני.



בדוגמה השנייה C_j הוא 1. שכן ישנם 3 קודקודים המחוברים ישירות לקודקוד j , והם מחוברים בשלושה חיבורים מתוך שלושה חיבורים אפשריים.



בדוגמה השלישית C_j הוא $1/3$. שכן ישנם 3 קודקודים המחוברים ישירות לקודקוד j , והם מחוברים רק בחיבור אחד (בין m ל- k) מתוך שלושה חיבורים אפשריים.

C_{ws} - ממוצע c_j על פני כל קודקודי הגרף. מדד לטרנזיטיביות הרשתית. מדד זה קרוי על שמם של STROGATZ ו WATTS. יצוין כי בגרף שלם, בו כל הקודקודים מחוברים עם כל הקודקודים, הערך של C_{ws} הוא 1.

התפלגות המרחקים עבור קודקוד מסוים - עבור כל קודקוד קיימת התפלגות של המרחקים. כלומר, מספר הקודקודים אליהם המרחק הקצר ביותר הוא אחת (כלומר, נמצאים באותה מועצת מנהלים), מספר הקודקודים אליהם המרחק הקצר ביותר הוא שתיים (קיים ביניהם לפחות דירקטור משותף אחד אך הם לא חברים באותה מועצת מנהלים), וכן הלאה. התפלגות המרחקים עבור כל הגרף (או עבור קבוצה) - ממוצע התפלגות המרחקים עבור כל הקודקודים בגרף (בקבוצה).

ב. האלגוריתם של דייקסטרה

האלגוריתם של דייקסטרה (**Dijkstra's algorithm**), פותר את הבעיה של מסלולים קצרים ביותר ממקור יחיד, היינו מקודקוד נתון, עבור גרף מכוון שצלעותיו נושאות משקולות, עבור משקולות אי שליליים בלבד. אנו השתמשנו בגירסא ממושטת של האלגוריתם, BFS, המובילה לאותן תוצאות.

האלגוריתם "זוכר", בכל שלב, קבוצה של קודקודים שעבורם כבר נקבע סופית המסלול הקצר ביותר מן המקור.

בכל איטרציה, בוחר האלגוריתם קודקוד שעדיין אינו בקבוצה האמורה, בעל האומדן של המסלול הקצר המינימאלי לקודקוד המקור מבין כל הקודקודים אשר אינם בקבוצה. אם הקודקוד הזה יכנס לתוך הקבוצה, יבדוק האלגוריתם לגבי כל קודקוד שאינו נמצא בקבוצה, אשר הנו שכן של הקודקוד החדש, האם ניתן לשפר לגביו את המסלול הקצר ביותר לקודקוד המקור. כיצד יעשה הדבר? ייבדק האם כשמוסיפים את אורך הצלע בין קודקוד כזה לקודקוד החדש אל המרחק הקצר ביותר בין קודקוד המקור לקודקוד החדש שהתווסף לקבוצה מתקבל מסלול קצר יותר משנמצא קודם. לתהליך זה קורים "הקלה".

כל עוד יש קודקודים בתור, כלומר קודקודים שעוד לא בקבוצה, נוציא את הקודקוד בעל האומדן המינימאלי של מרחק מקודקוד המקור מן התור נוסיף אותו לקבוצה של הקודקודים לגביהם האלגוריתם "זוכר" את המרחקים הקצרים ביותר, ומתבצעת "הקלה" על כל שכניו.

ג. מציאת המרחק בין שני דירקטורים - דוגמה

בין כל שני קודקודים אפשר ויתקיימו מסלולים רבים. על מנת למצוא את המרחק הקצר ביותר עלינו למצוא בגרף עצים רבים (עץ-הוא גרף חסר מעגלים). לדוגמה, נניח שקיימת רשת פשוטה בעלת 6 דירקטורים ($N=6$) ו-7 קישורים דו-כיווניים ($M=7$). הקישורים הם דו-כיווניים (היינו, הגרף אינו מכוון ואינו מציג יחסי כפיפות) משום שאם דירקטור 1 חבר במועצת מנהלים משותפת עם דירקטור 2, אזי דירקטור 2 חבר במועצת מנהלים משותפת עם דירקטור 1 (אותה מועצת מנהלים).

האלגוריתם של דייקסטרה מוצא ברשת שישה עצים (ראה איור). בראש כל עץ קיים אחד מששת הדירקטורים. הקישורים בעץ הם חד כיוונים.

התהליך: האלגוריתם בוחר דירקטור מסוים לחישוב, נניח בחר בדירקטור מס' 1 (ראה העץ הפורש השמאלי העליון). לדירקטור זה ניתן הערך 0 ולכל יתר הדירקטורים ניתן הערך אינסוף. בשלב השני האלגוריתם עובר על כל אחד משבעת הקישורים ובודק עבור אלו מהקישורים נמצא דירקטור מס' 1 (באחד משני צידי הקישור). הדירקטורים שנמצאים בצידו השני של הקישור מקבלים את הערך 1 (בדוגמה שלנו אלו דירקטורים 2 ו-3). בשלב השלישי, האלגוריתם עובר שנית על כל אחד משבעת הקישורים ובודק באלו מהם בצידו האחד נמצא דירקטור שקיבל את הערך 1 ובצידו האחר נמצא דירקטור שערכו אינסוף. דירקטורים אלו מקבלים את הערך 2 - בדוגמה שלנו אלו דירקטורים 5 ו-6. בשלב הרביעי, האלגוריתם עובר שוב על כל אחד משבעת הקישורים ובודק באלו מהם בצידו האחד נמצא דירקטור שקיבל את הערך 2 ובצידו האחר נמצא דירקטור שערכו אינסוף. בדוגמה שלנו, זהו דירקטור מס' 4 שמקבל את הערך 3 (אין משמעות לכך שישנם שני קישורים, ולא אחד, בהם נמצא דירקטור עם ערך 2 לדירקטור מס' 4). בשלב החמישי, האלגוריתם עובר שוב על כל אחד משבעת הקישורים ובודק באלו מהם בצידו האחד נמצא דירקטור שקיבל את הערך 3 ובצידו האחר נמצא דירקטור שערכו אינסוף. מכיוון שבדוגמה שלנו לא קיים כזה קישור, משום שלכל הדירקטורים כבר יש ערך סופי, אז האלגוריתם מפסיק את החישוב עבור דירקטור מס' 1¹⁸.

באותו אופן, האלגוריתם עורך את החישוב עבור דירקטורים 2, 3, 4, 5 ו-6.

הערך שהאלגוריתם הצמיד לכל דירקטור הינו המרחק הקצר ביותר בין הדירקטור עליו עורכים את החישוב לכל אחד מהדירקטורים אשר קיבלו ערך סופי. בין כל שני דירקטורים אשר קיים ביניהם מרחק סופי ניתן למצוא מספר דרכים. לדוגמה מדירקטור מס' 1 ניתן להגיע לדירקטור מס' 4 בדרך הבאה 1-2-5-4. דרך זו ארוכה משתי הדרכים אשר נותן האלגוריתם (אשר מרחקן 3, לעומת המרחק 4 שמתקבל בדרך המוצעת כאן). האלגוריתם מונע דרך זו ע"י

¹⁸ האלגוריתם היה נפסק גם אם היו דירקטורים עם הערך אינסוף, אך הוא לא היה מוצא קישור שבצידו האחד נמצא דירקטור עם הערך 3 ובצידו השני דירקטור עם הערך אינסוף. במקרה זה המרחק, בין דירקטור מס' 1 לדירקטור שלא קיבל ערך סופי, לא קיים (הדירקטור נמצא ברכיב קשירות אחר מזה של דירקטור מס' 1) ונגדיר אותו כאינסופי.

כך שהוא אינו בודק את הקישורים של שני דירקטורים אשר קיבלו ערך סופי (ובכך מונע את המעבר מדירקטור מס' 6 לדירקטור מס' 5).

לסיכום הדוגמה, ניתן להציג את התוצאות של האלגוריתם במטריצה (6 x 6).

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	3	2	2
2	1	0	2	2	2	1
3	1	2	0	2	1	2
4	3	2	2	0	1	1
5	2	2	1	1	0	1
6	2	1	2	1	1	0

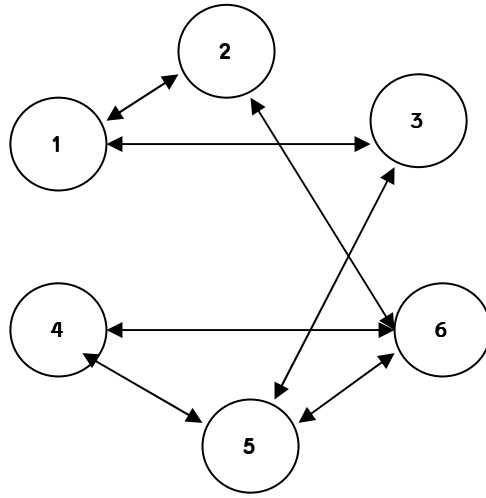
המטריצה שמתקבלת הינה סימטרית סביב האלכסון. תוצאה זו מתקבלת משום שכל הקישורים הינם דו-כיווניים. ולכן הדרך הקצרה ביותר להגיע מדירקטור א' לדירקטור ב' הינה אותה דרך בכיוון ההפוך ולכן מרחקה זהה.

בשל גודלה של רשת הדירקטורים בישראל (יחסית לדוגמה זו), ישנה חשיבות לרמת המורכבות של האלגוריתם וכן לעובדה שהמטריצה סימטרית. ברשת עם שישה דירקטורים נדרשים 36 חישובים ואילו ברשת עם 3,000 דירקטורים נדרשים 9,000,000 חישובים. בשל הסימטריה ניתן לבצע מחצית מהחישובים ובכך לחסוך מחצית מזמן המחשב (אך עדיין מספר החישובים הינו עצום - 4,500,000 חישובים).

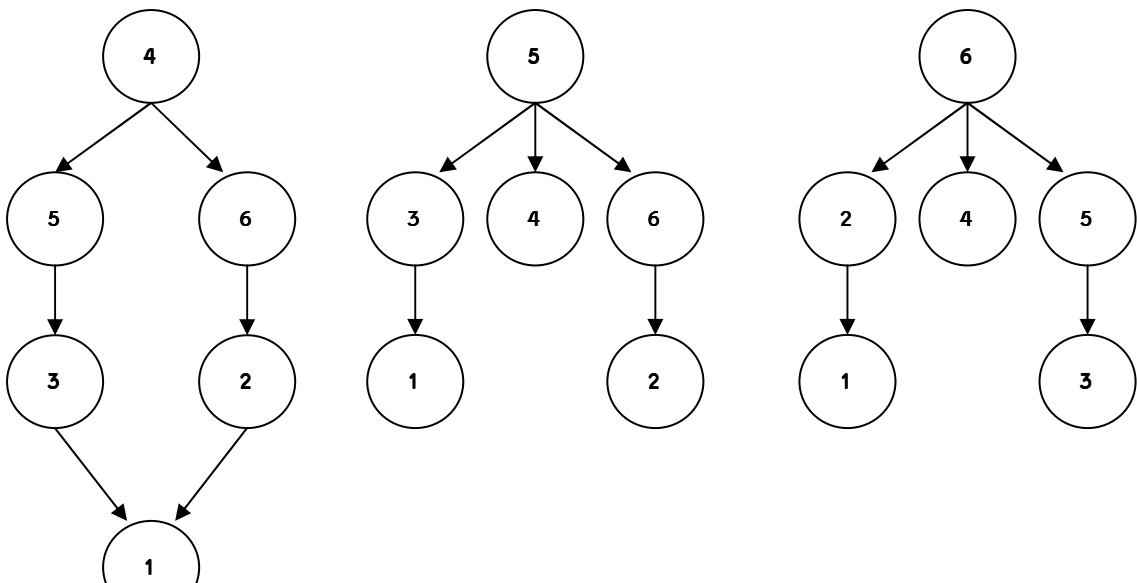
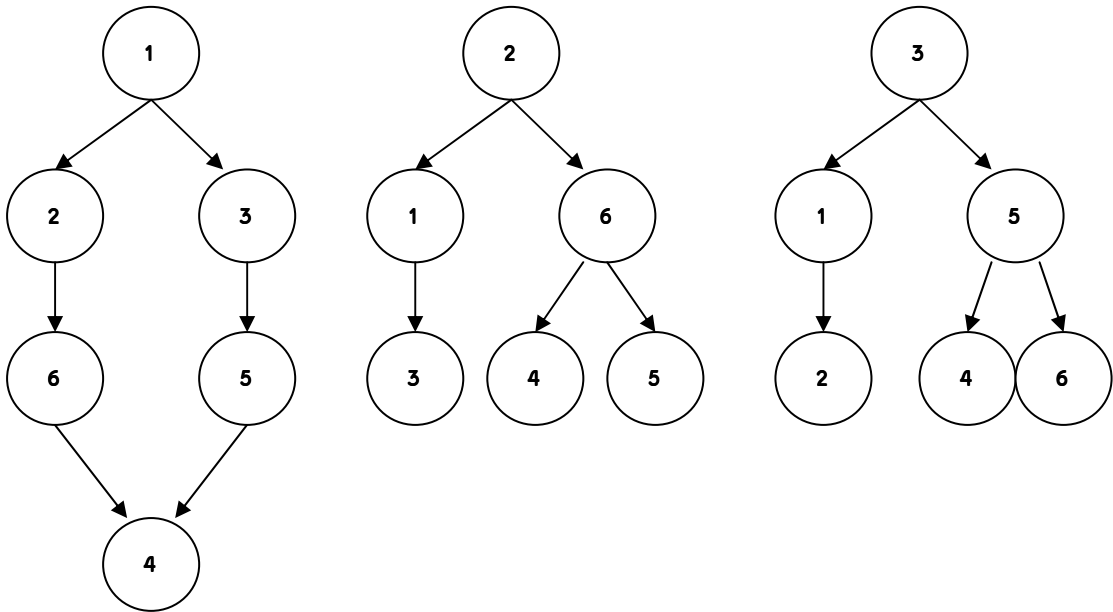
התפלגות המרחקים עבור הקודקודים ועבור הגרף כולו

מספר הקודקודים המרוחקים במרחק 3	מספר הקודקודים המרוחקים במרחק 2	מספר הקודקודים המרוחקים במרחק 1	קודקוד
1	2	2	1
0	3	2	2
0	3	2	3
1	2	2	4
0	2	3	5
0	2	3	6
0.33	2.33	2.33	התפלגות המרחקים עבור הגרף כולו (ממוצע)

רשת לדוגמה



שישה עצים פורשים (ראה הסבר בעמודים הקודמים)



5. מודל רשת הדירקטורים הרנדומאלית

כאשר אנו אומרים שברשת מסוימת מתקיימות תכונות "העולם הקטן", נשאלת השאלה: "עולם קטן" בהשוואה למה?

כל בר דעת יכול לומר כי רשת הדירקטורים בישראל הינה רשת קטנה יותר מזו של ארצות הברית, למשל. מסקנה זו מתבקשת, שכן מספר הדירקטורים בישראל (כמו גם מספר החברות הציבוריות) קטן משמעותית מזה של ארה"ב. אולם, לדידנו, להשוואה זו אין כלל משמעות ועניין.

השוואה נכונה ורלוונטית יותר הינה לאוסף גדול ביותר של **רשתות תיאורטיות, כשכל רשת תיאורטית באוסף** דומה לזו של רשת הדירקטורים בישראל. דומה-במובן שברשת התיאורטית מספר הדירקטורים ומספר הקישורים הכללי זהה לאלו שברשת האמיתית, אך הקישורים עצמם בין הדירקטורים נעשים **באופן אקראי**, כשאת ההסתברות ליצירת קשר בין שני קודקודים מקבלים מהתפלגות הדרגות בגרף של הרשת המציאותית. עם זאת, הרשת התיאורטית אינה אקראית לגמרי, אלא באופן חלקי בלבד, שכן היא מקבלת את הפרמטרים הכלליים של המודל המציאותי שלנו. מבין כל הרשתות שנוצרות באופן אקראי, נחשב באופן סטטיסטי את הרשת הממוצעת, ורשת זו תשווה, בפרמטרים שבאמצעותם נבחן את קיומו של ה"עולם הקטן", לרשת הדירקטורים האמיתית הקיימת בישראל. למשל, לאחר שמתקבלות הרשתות התיאורטיות אפשר לחשב עבורן פונקציות של המרחק ושל טרנזיטיביות רשתית ואז להשוות את הגדלים האמורים לרשת האמיתית. אם ברשת האמיתית, המרחק יהיה קטן מהצפוי ומדד הטרנזיטיביות הרשתית יהיה גדול מהצפוי, נוכל לומר כי לפנינו "עולם קטן" מהצפוי. הנה כי כן, השוואה זו-בין הרשת האמיתית לאוסף ענק של רשתות תיאורטיות, המיוצרות באופן אקראי, אך החולקות פרמטרים משותפים עם הרשת האמיתית, תיתן תוצאה באמצעותה, תוך שימוש במדד הטרנזיטיביות הרשתית והמרחק הממוצע, נוכל לומר עד כמה רשת הדירקטורים בישראל מהווה עולם קטן לעומת זו שהיינו מצפים לקבל אילו הקישורים בין הדירקטורים היו נעשים **באופן אקראי**.

תוצאות אלו יושוו גם למחקרים דומים שנכתבו על רשתות הדירקטורים בארצות הברית, בבריטניה ובגרמניה.

בפועל, הגדלים החשובים לקביעה האם מדובר ב"עולם קטן" חושבו, בדרך עקיפה, לא על דרך יצירת מספר גדול של גרפים אקראיים, אלא, תוך שימוש בכלי מעניין של **פונקציות יוצרות**, באותו אופן כפי שמוצג במאמר:

Conyon, Martin J. and Mark R. Muldoon, "The small world network structure of boards of directors", May 2004

בשל חשיבותו של עניין זה, המסתמך על פונקציות יוצרות, **אנו נביא בנספח א' ציטוט ישיר**
ממאמר זה.

6. רשת הדירקטורים בישראל

על מנת לבצע את המחקר אספנו נתונים אודות הדירקטורים¹⁹. לכל דירקטור נפתחה רשומה אחת, או מספר רשומות על פי מספר החברות בהן הוא משרת. כל דירקטור קיבל מספר חד-חד ערכי המייצג אותו. כמו כן בכל רשומה מופיע שם החברה בה חבר הדירקטור ומספר חד-חד ערכי שקיבלה החברה (מס' החברה עפ"י רשומות אתר הבורסה לניירות ערך).

רשימת הדירקטורים כוללת רק את הדירקטורים החברים בחברות הציבוריות (ללא התייחסות לדירקטורים בחברות של תעודות סל) ונכונה ליום קבלת הנתונים מרשות ניירות ערך (1 באוקטובר 2006).

הקובץ מכיל 3972 רשומות.

נתוני ההשוואה עבור ארצות הברית, בריטניה וגרמניה הוצאו ממחקר מקביל²⁰.

¹⁹ הנתונים הועמדו לרשותנו באדיבותה הרבה של רשות ניירות ערך וכן נלקחו מאתר הבורסה לניירות ערך בתל אביב.

²⁰ Martin J. Conyon and Mark R. Muldoon, "The small world network structure of boards of directors", May 2004.

א. הנתונים הבסיסיים

במחקר נאספו נתונים אודות 3011 דירקטורים שונים המכהנים בתפקיד דירקטור באחת מ-546 החברות הציבוריות (כחמישית ממספר הדירקטורים עליהם נאספו נתונים במחקרים דומים בארה"ב, בריטניה וגרמניה).

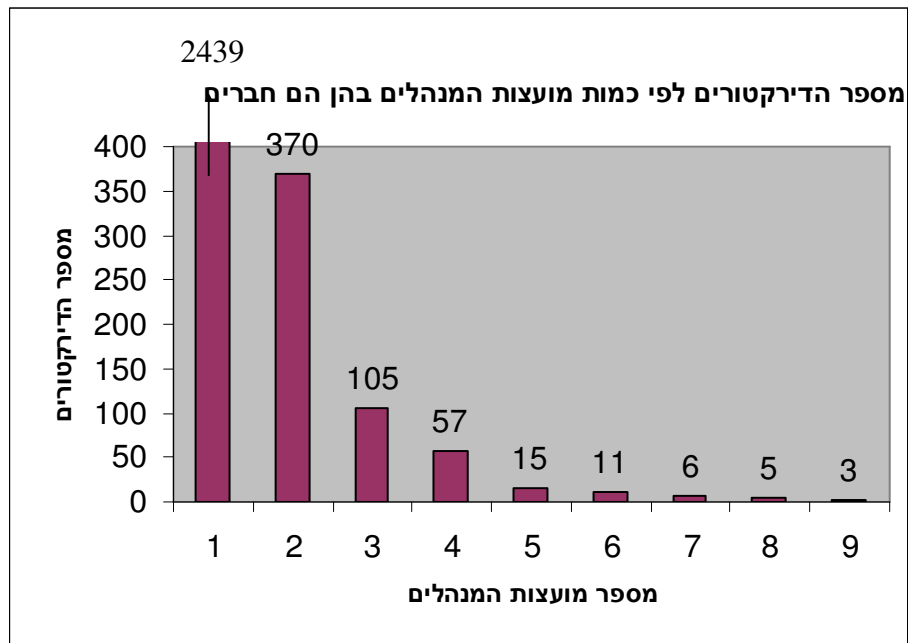
מועצת המנהלים הממוצעת בישראל מונה כ-5.51 דירקטורים, מספר דירקטורים ממוצע הקטן ממספר הדירקטורים במועצת מנהלים ממוצעת בארה"ב (9.97), בריטניה (6.51) ובגרמניה (6.33).

כפי שצוין, המחקר מתמקד ברכיב הקשירות הגדול ביותר (כל חלק בגרף ממנו ניתן להגיע בעזרת מספר סופי של קישורים מנקודה לנקודה).

בנוסף, בישראל מספר החברויות במועצות המנהלים קטן מהממוצע בארה"ב, בריטניה וגרמניה. בעוד שבישראל דירקטור מכהן בממוצע ב-1.32 מועצות מנהלים (מרבית הדירקטורים מכהנים במועצת מנהלים אחת בלבד, אך קיומן של "רכוזות" יוצר קישוריות), בבריטניה חבר דירקטור בכ-1.84 מועצות מנהלים בממוצע.

אילו היינו מחלקים אותם באופן מקרי ²¹	מספר דירקטורים בפועל	כמות החברות בהן חבר הדירקטור
1628	1861	1
626	328	2
120	105	3
15	57	4
2	15	5
0	11	6
0	6	7
0	5	8
0	3	9

²¹ כלומר, אילו היינו מחלקים 3,310 מושבי דירקטורים ל-2,391 דירקטורים באופן הבא: כל דירקטור מקבל מושב אחד. ואת 919 המושבים הנותרים אנו מחלקים באופן אקראי עבור 2,391 הדירקטורים. חלקם (רובם) יוותרו עם המושב הבודד שהבאנו להם בהתחלה, ואילו חלקם יקבל מושבים נוספים. "ברי המזל" יצליחו לקבל אף 4 מושבים נוספים. החישוב מבוסס על ההתפלגות הפואסונית, כאשר התוחלת "להצלחה" הינה $0.38435 = 919/2391$. התוצאות מעוגלות לשלם הקרוב ביותר.



בעוד שבבריטניה ובארה"ב רכיב הקשירות הגדול ביותר מכיל כ-64-61 אחוזים מהדירקטורים בישראל מכיל רכיב הקשירות הגדול ביותר כ-79 אחוזים מהדירקטורים (וכ-82 אחוזים מהחברות). בגרמניה הדירקטורים התחלקו לשני רכיבי קשירות גדולים וברכיב הקשירות הגדול יותר יש כ-28 אחוזים מהדירקטורים בלבד.

הנתון אודות ישראל מלמד כי בישראל מרבית הדירקטורים בכלל החברות הציבוריות מקושרים בדרך כלשהי אחד לשני ומספר מצומצם יחסית של הדירקטורים (כ-21 אחוזים מהם) אינם מקושרים לרשת המרכזית²². זאת, בעוד שבארה"ב ובבריטניה, דירקטורים רבים הם "שחקנים בסרטי וידאו", היינו, לא קשורים למשחק המרכזי. אולם, אולי יהיה בנתון זה כדי להסביר בהמשך מדוע ממוצע המרחקים ברשת הישראלית, הנמדדת על פי רכיב הקשירות הגדול ביותר, גדול יותר מאשר בארה"ב.

²² נתון זה לכשעצמו מעניין, אם כי בהמשך המחקר נתעלם מאותם 21 אחוזים מהדירקטורים אשר לא מחוברים לרשת המרכזית (מרביתם מחוברים רק לדירקטורים איתם הם באותה חברה), ויוצרים הרבה רכיבי קשירות קטנים.

גרמניה	בריטניה	ארה"ב	ישראל	
14904	14552	17277	3011	מספר הדירקטורים
12747	11541	13330	2439	דירקטורים אשר חברים בחברה אחת בלבד
2354	2236	1733	546	מספר החברות
6.33	6.51	9.97	5.51	גודלה של מועצת מנהלים ממוצעת
1.45	1.84	1.63	1.32	מוצע לדירקטור של מספר החברויות במועצות המנהלים
4185	8850	11057	2391	רכיב הקשירות הגדול – כמות דירקטורים
582	1732	1473	447	רכיב הקשירות הגדול – כמות חברות
28.1%	60.8%	64.0%	79.4%	שיעור הדירקטורים ברכיב הקשירות הגדול
24.7%	77.5%	85.0%	81.9%	שיעור החברות ברכיב הקשירות הגדול

התוצאה המרכזית של עבודה זו מובאת בטבלה הבאה :

C-טרנזיטיביות רשתית		L-מרחק			קודקודים	רשת
בפועל	מצופה	הפרש	בפועל	מצופה		
0.651	0.639	1.510	5.470	3.960	2391	ישראל
0.556	0.560	0.960	5.188	4.228	11057	ארה"ב
0.612	0.546	1.667	6.462	4.795	8850	בריטניה
0.719	0.622	2.894	6.398	3.504	4185	גרמניה

טבלה זו מלמדת כי בכל הרשתות שנבחנו, למרות קיום של שוני מהותי במבנה הממשל התאגידי ביניהן, קיים דמיון גדול בין הנתונים בפועל לבין המצופה מהרשת, הינו, כל 4 הרשתות, כולל הרשת הישראלית, מציגות "עולם קטן". עם זאת, לא עולם קטן יותר מזה שניתן היה לצפות מהתנהגות אקראית. נרחיב מעט את הדיון: ברשת האמריקאית יש 11 אלף קודקודים (דירקטורים) ועם זאת, די ב-5.2 קשרים כדי לנוע בין דירקטור לדירקטור. ברשת הישראלית, יש למעלה מאלפיים קודקודים (דירקטורים) ודי ב-5.5 מהלכים כדי לנוע בין דירקטורים. אלו נתונים המעידים על קישוריות עצומה, נתונים המעידים כמה מהר יכולה

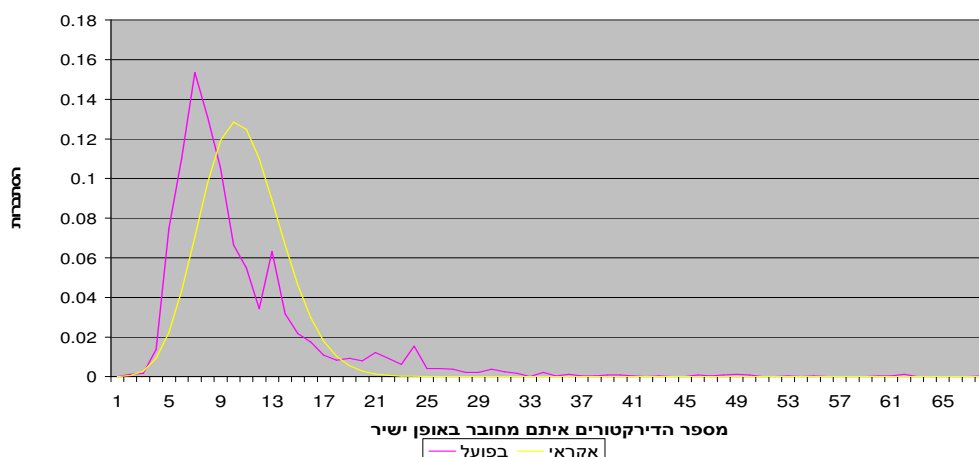
אינפורמציה ויכולות פרקטיקות לנוע בין חברות. באשר לטרנזיטיביות הרשתית, גם ישראל, כבריטניה וגרמניה, ובשונה מארה"ב, נוטה להיות מעט "CLUBBY". היינו, חבריו של דירקטור נוטים, יותר מהצפוי על פי רשת אקראית עם אותם פרמטרים, להיות חברים.

ב. דיון ברכיב הקשירות הגדול עבור $d=1$

כל אחד מבין 2391 הדירקטורים ברכיב הקשירות הגדול מקושר עם כל יתר הדירקטורים באותו רכיב קשירות. חלק מהדירקטורים מחוברים בקישור ישיר ($d=1$), כלומר דירקטורים היושבים באותה מועצת מנהלים, וחלק מהדירקטורים מקושרים בחיבור עקיף ($d>1$). כזכור, מספר הדירקטורים אליהם מחובר כל דירקטור בקישור ישיר נקרא דרגת הדירקטור (K). דרגה גבוהה של דירקטור, מצביעה על רמת קישוריות גבוהה יותר עבור הדירקטור. ברשת הדירקטורים בישראל, דרגת מרבית הדירקטורים (כ-85 אחוזים) הינה בין 4 ל-14 דירקטורים. כלומר, מרבית הדירקטורים יושבים במועצות מנהלים עם 4-14 דירקטורים **במצטבר** (הממוצע עבור דירקטור ברכיב הקשירות הגדול הינו 9.71 חברים במצטבר אשר יושבים איתו באותן מועצות מנהלים. עם זאת, ישנם כ-13.5 אחוזים מהדירקטורים אשר יושבים ביחד עם יותר מ-15 דירקטורים, מתוכם כ-1.6 אחוזים מהדירקטורים אף יושבים עם יותר מ-30 דירקטורים במצטבר באותן מועצות מנהלים. דירקטורים אלו אשר מרביתם שייכים ל-9-5 מועצות מנהלים הינם אותם דירקטורים אשר יוצרים את ה"עולם הקטן" של רשת הדירקטורים בישראל²³.

ניתן לראות מהגרף כי בפועל הדירקטורים בישראל מחוברים או למעט דירקטורים או להרבה דירקטורים. כמות הדירקטורים המחברים לכמות בינונית (בין 9-18) של דירקטורים קטנה ברשת הישראלית לעומת הרשת שהתקבלה באופן אקראי.

ההסתברות להיות מקושר באופן ישיר עם מספר דירקטורים - בפועל ואקראי



היינו, הרשת במציאות מציגה "התפלגות דרגות דירקטורים" שונה מהותית מזו שניתן היה לצפות לה לפי הרשת האקראית.

²³ ישנו דירקטור אחד אשר מכהן במצטבר עם 67 דירקטורים שונים במועצות מנהלים.

לא בחנו זאת בבדיקות נוספות, אך אפשר כי היחס בין העקומות לעיל מעיד על תופעה מוכרת בעולם הרשתות, לפיה, דירקטורים מקושרים יושבים במועצות מנהלים עם מקושרים אחרים ודירקטורים לא מקושרים יושבים יותר עם לא מקושרים אחרים.

הסבר לחישוב העקומה שיוצר הגרף האקראי :

החישוב התבסס על כך כי קיימים 2391 קודקודים (ברכיב הקשירות הגדול). ולכן ישנם 2,857,245 חיבורים אפשריים (2391 קודקודים כפול 2390 חיבורים לקודקוד נוסף חלקי 2 - כל זוג נספר פעם אחת).

מספר החיבורים שספרנו ברשת הדירקטורים הינו 11,608. היינו, רק חלק קטן ביותר מהחיבורים האפשריים אכן קרה. עם זאת, די באלה שקרו על מנת ליצור מספר קטן של דרגות הפרדה, שמאפשר להגיע במהירות מכל דירקטור לכל דירקטור.

ולכן ההסתברות לחיבור בין שני דירקטורים אקראיים הינה 0.406%.

ההסתברות למצוא קודקוד בדרגה k כלשהי מחושבת עפ"י ההתפלגות הבינומית, כאשר יש 2390 ניסיונות לחיבור כלשהו, k הוא מספר "ההצלחות", ו-k-2390 הוא מספר הכישלונות. ההסתברות להצלחה בודדת היא 0.406% וההסתברות לכישלון בודד היא 99.594%. סכום ההסתברויות מ-0 הצלחות ועד 2390 הצלחות הינו 1.

לדוגמא, ההסתברות לדירקטור בדרגה 10 (קרי 10 הצלחות ו-2380 כישלונות), היא :

$$P(x = 10) = \frac{2390!}{2380! * 10!} * 0.00406^{10} * 0.99594^{2380} = 12.48\%$$

ג. ההתפלגות השלמה של המרחקים עבור כל דירקטור (עבור כל

$d > 0$): או מיהו האיש או מיהי האישה שמהווים את מרכז הרשת?

כמובן, שכדי להבין את התמונה כולה אין זה מספיק לדון בכמה דירקטורים מקושרים בדרגת קרבה ראשונה לדירקטור מסוים. תת פרק זה יעסוק בהתפלגות השלמה של המרחקים עבור כל דירקטור. כלומר, כמה דירקטורים **מרוחקים** מדירקטור X במרחק של $1, 2, 3, \dots, 15$ וכן הלאה. הבדיקה תיעשה עבור כל אחד מ-2391 הדירקטורים בקומפוננט הגדול²⁴.

דירקטור מסוים עם דרגה גבוהה (k גדול), אינו בהכרח דירקטור מקושר ברמה גבוהה אם הדירקטורים אליהם הוא מקושר אינם דירקטורים מקושרים.

לאחר הרצת התוכנה התגלה כי הדירקטור המקושר ביותר²⁵ מרוחק מדירקטור אחר ברשת בכ-3.54 יחידות בממוצע, והדירקטור **הכי פחות מקושר** ברשת (שגם את השם שלו לא נגלה לקוראים שהגיעו עד כאן!) יכול להגיע לדירקטור ברשת בכ-9.85 יחידות בממוצע. בממוצע יכול דירקטור מסוים להגיע לדירקטור מסוים אחר בכ-5.47 יחידות (סטיית תקן של כ-0.96 יחידות). תוצאה זו מכונה בספרות "שש דרגות ההפרדה" (במקרה של רשת הדירקטורים בישראל הגענו ל-5.47 דרגות הפרדה). יצוין, כי מספר דרגות ההפרדה ברשת הדירקטורים בישראל, עלול להיתפס כגדול עבור רשת קטנה יחסית (יחסית לרשת החברתית של העולם כולו), בשל העובדה שהקישורים בין שני דירקטורים נעשים רק עבור רמת היכרות מסוימת, כלומר, רק אם שני דירקטורים יושבים באותה מועצת מנהלים בישראל. התוצאה התיאורטית של "שש דרגות ההפרדה" לוקחת בחשבון את כל סוגי ההיכרות (כלומר מספיק שאדם אי מכיר אדם ב', אפילו אם אין להם בסיס היכרות פורמאלית, הם נחשבים מקושרים) - דבר המצמצם את מספר הדרגות ברשת. (ראה בהקשר זה את הדוגמא של מספר ארדש של אייל סולגניק: ברשת שיתוף הפעולה המדעי-6, ברשת החברתית-2).

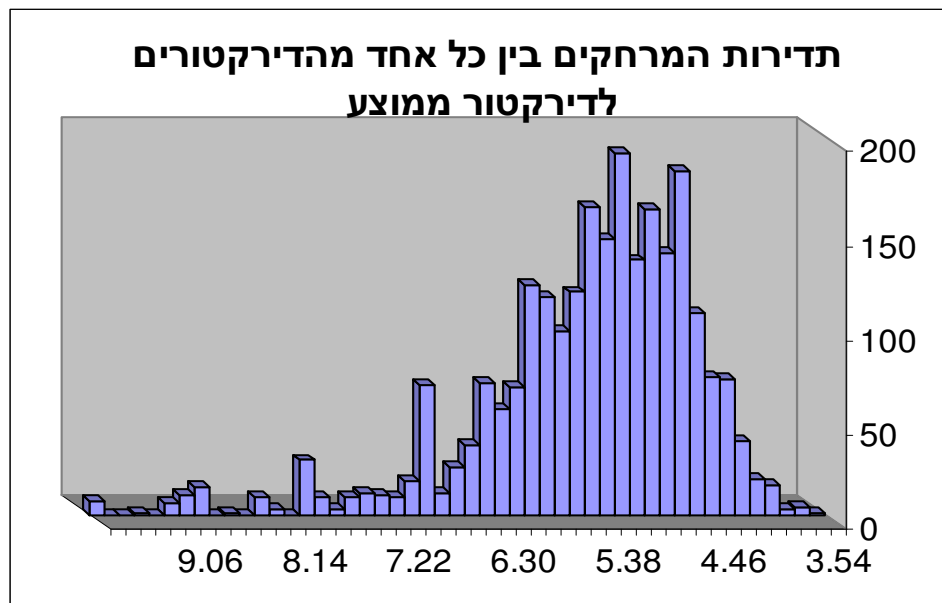
להלן נתונים סטטיסטים עבור המרחק בין דירקטור מסוים לדירקטור מסוים אחר:

²⁴ הבדיקה הורצה ע"י תוכנה שיצרה את האלגוריתם של דייקסטרה עם התאמות מחייבות למקרה זה (ראה תת פרק 3.1).

²⁵ דירקטור המקושר ביותר מוגדר כדירקטור אשר **ממוצע המרחקים** ממנו לכל אחד מהדירקטורים האחרים ברכיב הקשירות הגדול הוא הקטן ביותר

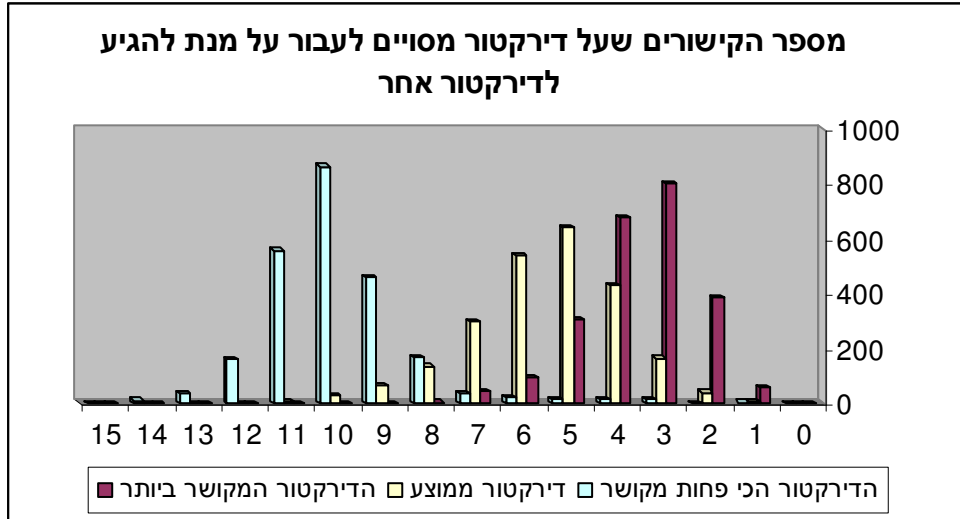
5.467570166	Mean
0.019547351	Standard Error
5.298619824	Median
5.503554998	Mode
0.955823488	Standard Deviation
0.91359854	Sample Variance
6.30823923	Range
3.541614387	Minimum
9.849853618	Maximum
2391	Count

מרבית הדירקטורים מקושרים במרחק של בין 4-7 יחידות עם דירקטור מסוים אחר (ראה גרף).



מכיוון שאין זה פרקטי להציג באופן גרפי את התפלגות המרחקים (של 2390 הדירקטורים האחרים) עבור כל אחד מהדירקטורים בנפרד, בחרנו להציג את ההבדלים בין שלושה דירקטורים: הדירקטור המקושר ביותר (עם ממוצע מרחקים של 3.54), הדירקטור הכי פחות מקושר (עם ממוצע מרחקים של 9.85) ושל "דירקטור הממוצע" (המשקלל את כל הדירקטורים וממוצע המרחקים ממנו הוא 5.47). הדירקטור המקושר ביותר מרוחק ב-8

יחידות מהדירקטור הרחוק ביותר ממנו ואילו הדירקטור הכי פחות מקושר מרוחק ב-15 יחידות מהדירקטור הכי מרוחק ממנו.



ד. רשימת הדירקטורים והחברות המקושרים ביותר²⁶

להלן טבלאות המביאות את "רמת הקישוריות הממוצעת" של הדירקטורים המקושרים ביותר. מעניינת העובדה שקיימים כ-40 דירקטורים שרמת הקישוריות שלהם נמוכה מ-4 וגבוהה מ-3.5, עניין המעיד על עוצמת הקישוריות ברשת. היינו, נראה כי גם אם נסלק דירקטור מרכזי רמת הקישוריות לא תיפגע אנושות.

²⁶ בטבלת הדירקטורים מתייחס הממוצע למרחק הממוצע מהדירקטור המצוין בטבלה ליתר הדירקטורים. בטבלת החברות מתייחס הממוצע הממוצע של המרחקים של כל אחד מהדירקטורים של אותה חברה.

ממוצע	מיקום הדירקטור
3.955	27
3.957	28
3.961	29
3.966	30
3.970	31
3.977	32
3.978	33
3.980	34
3.983	35
3.993	36
3.994	37
4.009	38
4.016	39
4.031	40
4.032	41
4.037	42
4.054	43
4.072	44
4.072	45
4.077	46
4.088	47
4.093	48
4.097	49
4.097	50
4.097	51

ממוצע	מיקום הדירקטור
3.542	1
3.563	2
3.570	3
3.584	4
3.650	5
3.704	6
3.731	7
3.789	8
3.815	9
3.820	10
3.829	11
3.832	12
3.835	13
3.835	14
3.852	15
3.859	16
3.869	17
3.879	18
3.893	19
3.905	20
3.906	21
3.910	22
3.931	23
3.932	24
3.940	25
3.944	26

ואילו החברות המקושרות ביותר, בממוצע, הן אלה :

ממוצע	מיקום החברה	ממוצע	מיקום החברה
4.108	14	3.801	1
4.115	15	3.811	2
4.116	16	3.852	3
4.130	17	3.872	4
4.157	18	3.879	5
4.195	19	3.932	6
4.213	20	3.969	7
4.213	21	3.993	8
4.224	22	4.015	9
4.227	23	4.039	10
4.264	24	4.047	11
4.285	25	4.082	12
		4.105	13

ה. מה גורם לדירקטור להיות מקושר?

לכל דירקטור רמת קישוריות שונה. רמת הקישוריות של הדירקטור מורכבת משני פרמטרים עיקריים:

- **מספר מועצות המנהלים בהן חבר הדירקטור** - ככל שהדירקטור חבר ביותר מועצות מנהלים, כך הוא מקושר ליותר דירקטורים וכך רמת הקישוריות שלו עולה.
- **"איכות" מועצת המנהלים בה חבר הדירקטור** - פרמטר זה משפיע הרבה יותר על רמת הקישוריות של הדירקטור. דירקטור הנמצא במועצת מנהלים בה חברים דירקטורים מרכזיים ברשת יהיה מקושר מאוד גם אם הוא יושב במועצת מנהלים אחת. מספיק שבאותה מועצת מנהלים יושב דירקטור בעל רמת קישוריות ממוצעת של 4, רמת הקישוריות של כל דירקטור אחר, שיושב איתו באותה מועצת מנהלים, תהיה בהכרח קטנה מ-5 (קישור אחד לדירקטור המקושר ברמה 4 ועוד ארבעה קישורים בממוצע לכל יתר הרשת).

ו. האם הדירקטורים החיצוניים מעלים או מורידים את רמת הריכוזיות?

שאלה מעניינת לגבי רשת הדירקטורים היא האם הדירקטורים החיצוניים, שומרי הסף האולטימטיביים, מעלים או מורידים את רמת הריכוזיות ברשת? במידה והתשובה חיובית יהיה על הרגולטור לשקול האם מצב זה ראוי ולהניח בפני המחקק הצעה לתיקון (ראה ההתייחסות בספרו של פרופ' גרוס להצעת חוק החברות שחשבה להגביל זאת).

ברשת הדירקטורים בישראל 2391 דירקטורים מתוכם 1722 דירקטורים "רגילים" ו-669 דירקטורים חיצוניים (דירקטור המשמש גם כדירקטור "רגיל" וגם כדירקטור חיצוני נספר רק ברשימת הדירקטורים החיצוניים). חישבנו את ממוצע המרחקים של כל אחד מ-669 הדירקטורים החיצוניים לכל אחד מ-2390 הדירקטורים האחרים ברשת (כלומר, המרחק מהדירקטור החיצוני אל כל דירקטור מלבד עצמו). חישוב דומה ערכנו עבור כל אחד מ-1722 הדירקטורים הרגילים. ממוצע הממוצעים עבור 669 הדח"צים יצא 5.446, ועבור הדירקטורים הרגילים יצא 5.476 (עבור כל הדירקטורים - 5.470). **כלומר, הדירקטורים החיצוניים מעלים את רמת הקישוריות ברשת, או בלשון אחר, את רמת הריכוזיות של הרשת, אך זאת רק במעט.**

ז. דירקטוריות- האם מקושרות יותר או פחות?

ברשת הדירקטורים בישראל 2391 דירקטורים מתוכם 1991 דירקטורים גברים ו-400 דירקטורים נשים. חישבנו את ממוצע המרחקים של כל אחת מ-400 הנשים ברשת לכל אחד מ-2390 הדירקטורים האחרים ברשת (כלומר, המרחק מהדירקטורית אל כל דירקטור מלבד עצמה). כנ"ל עבור כל אחד מ-1991 הדירקטורים הגברים. ממוצע הממוצעים עבור 400 הנשים יצא 5.534, ועבור הגברים יצא 5.454 (עבור כל הדירקטורים - 5.470). כלומר, הנשים פחות מקושרות מאשר הגברים ברשת. ההפרש ברמת הקישוריות בין הגברים לנשים הינו 0.008, לא נראה גבוה במיוחד. אך מכיוון שכמעט בכל דירקטוריון (שמונה יותר מדירקטור אחד) יש לפחות אישה אחת, ההפרש בין רמת הקישוריות בין האישה לבין הדירקטורים באותה חברה חייבת להיות לכל היותר 1. ההפרש בין תוצאת הנשים לתוצאת הגברים הינו מובהק, כלומר ניתן לומר כי ההבדלים שנוצרו בין הגברים לנשים אינם מקריים. בנוסף, דבר המחזק את תוצאה זו היא שמרבית הדירקטוריונים בהם מכהן דירקטור אחד בלבד הינם גברים (גבוה בהרבה מהפרופורציה בין גברים לנשים ברשת), דבר זה הוריד את רמת הקישוריות של הגברים ועם זאת עדיין יצאו הגברים מקושרים יותר מהנשים בהפרש מובהק.

7. מציאת המרכז הגיאוגרפי של הרשת

נקודת המרכז הגיאוגרפי של רשת, זו נקודה ברשת כך שהמרחק המקסימאלי ממנה לכל קודקוד אחר ברשת הוא הקטן ביותר.

דירקטור הנמצא במרכז הגיאוגרפי הוא אחד אשר המרחק המקסימאלי ממנו לכל יתר הדירקטורים הוא מינימאלי.

רשת דירקטורים מאופיינת מעט שונה מרשתות מקריות ולכן מציאת נקודת המרכז הגיאוגרפי שונה במקצת (ופשוטה יותר) מאשר מציאת מרכז ברשתות רגילות. בעוד שהמרחק הבסיסי בין שתי נקודות סמוכות ברשת אינו חייב להיות קבוע.

את נקודת המרכז אפשר למצוא ע"י מציאת שני הדירקטורים המרוחקים ביותר זה מזה. ובשלב השני למצוא את הדירקטור שנמצא בניהם.

ברשת הדירקטורים בישראל המרכז הגיאוגרפי אינה נקודה בודדה. התקבלו חמש חברות אשר ממוקמות במרכז הרשת, בחברות אלו כל הדירקטורים הם דירקטורים מרכזיים (38 במספר).

בנוסף, קיימים 7 דירקטורים אשר לא מכהנים כדירקטורים באחת מהחברות במרכז הרשת, אם כי צירוף החברות בהן הם מכהנים ממקמים גם אותם במרכז הרשת.

8. עד כמה קטנה רשת הדירקטורים בישראל?

כפי שהגדרנו בתחילת העבודה רשת המקיימת טרנזיטיביות רשתית גבוהה (C גדול) ומרחק קצר בין הקודקודים (L קצר) הינה רשת המאופיינת כ"עולם קטן". ועל פי עיקרון ההשוואתיות שצוין בפרק 4, טרנזיטיביות רשתית גבוהה ומרחק קצר בין הקודקודים צריכים להיות מושווים לרשת אחרת, תיאורטית, המיצרת אקראית, הנשענת על אותם פרמטרים. בפרק זה נציג חישובים של מדדים אלו ונשווה אותם כפי שהוסבר בפרק 4.

א. טרנזיטיביות רשתית

מדד לטרנזיטיביות הרשתית מחושב באופן הבא :

בוחרים דירקטור j . עבור דירקטור זה מוצאים את כל הדירקטורים אשר מרחקם ממנו הוא יחידה אחת (נניח שיש k דירקטורים כאלו). בונים טבלת מרחקים בין כל הדירקטורים k הללו. ייווצרו $k*(k-1)/2$ מרחקים. מספר המרחקים השווים ל-1 חלקי מספר המרחקים האפשריים יוגדר כ- c_j . ממוצע כל c_j עבור כל הדירקטורים (כל ה- j) יוגדר כ- C_{ws} .

מדד טרנזיטיביות רשתית נוסף הינו היחס בין מספר המשולשים שנוצרים בין שלושה דירקטורים לבין מספר "שלישיות המחוברות" (או שמחוברת באמצעות משולש או ששני דירקטורים מחוברים עם דירקטור שלישי מקשר) מוכפל ב-3 (כדי שהמדד יצא בין 0 ל-1). כל משולש הוא בעצם שלוש "שלישיות מחוברות" ולכן אם כל הדירקטורים מחוברים עם כל הדירקטורים יחס זה הוא 1, כלומר הטרנזיטיביות הרשתית גבוהה (אנחנו השתמשנו במדד הזה לחישוב הטרנזיטיביות הרשתית).

ב. מרחק בין הקודקודים

המרחק בין הקודקודים L שווה לסכום של כל המרחקים בין כל שני קודקודים ברשת מחולק במספר הזוגות האפשריים $(N*(N-1) / 2)$.

ברשת הדירקטורים בישראל $L=5.47$

במידה ולוקחים רשת דירקטורים אקראית עם מספר דירקטורים דומה וכן מספר קישורים דומה היינו מצפים לקבל שהמרחק הממוצע בין שני דירקטורים הוא 3.96.

ג. טבלה מסכמת

C		L			קודקודים	רשת
בפועל	מצופה	הפרש	בפועל	מצופה		
0.651	0.639	1.510	5.470	3.960	2391	ישראל
0.556	0.560	0.960	5.188	4.228	11057	ארה"ב
0.612	0.546	1.667	6.462	4.795	8850	בריטניה
0.719	0.622	2.894	6.398	3.504	4185	גרמניה

9. סיכום:

בעבודה זו נעשה ניסיון, ראשון בישראל, למפות את הטופולוגיה של רשת הדירקטורים בחברות ציבוריות. במסגרת זו מצאנו את האפיונים המרכזיים של הרשת, את מרכז הרשת, את המרחקים בה ואת הטורנזיטיביות הרשתית שהיא מציגה.

באמצעות מיפוי זה ניסינו, ראשית, לתת תשובה לשאלה המעניינת בתחום מחקר זה: "האם רשת הדירקטורים בישראל מהווה עולם קטן".

כפי שמראים הממצאים, רשת הדירקטורים בישראל הינה אכן "עולם קטן", שכן למרות שבין הדירקטורים בה קיימים 11 אלף קשרים בלבד (מתוך מיליוני הקשרים האפשריים), ניתן להגיע מכל דירקטור לכל דירקטור בממוצע של 5-6 צעדים.

עם זאת, היא אינה קטנה מהצפוי. היינו, ברשת אקראית (המבוססת על אותם פרמטרים) המרחק הממוצע והטורנזיטיביות הרשתית לא היו גבוהים יותר (למעשה, הם היו נמוכים יותר).

ממצאים אלה דומים ועולים בקנה אחד עם ממצאים לגבי רשתות דירקטורים בארה"ב, אנגליה וגרמניה, על אף שוני במודל הממשל התאגידי הנקוט בהן.

בעבודה זו לא נתנו תשובה מוחלטת לשאלה החשובה האם "דירקטורים מקושרים נוטים לשבת יחד עם מקושרים אחרים" ואילו "דירקטורים לא מקושרים נוטים לכהן יחד עם לא מקושרים אחרים". עם זאת, אנו מתרשמים כי זה המצב ברשת הדירקטורים בישראל. שאלה זו מצריכה עיון עמוק לא רק ב"צילום תמונת המצב" של הרשת, אלא גם בתהליך הדינאמי האבולוציוני שבבסיסה.

אף שהעבודה לא עסקה מפורשות בתמריצים של דירקטורים וחברות להעביר מידע ביניהן (באופן חוקי) נראה כי העובדה שרשת הדירקטורים מציגה תכונות של "עולם קטן" צריכה להילקח בחשבון בשאלות הנוגעות לחוק החברות ולחוק ניירות ערך.

במיוחד, יש להפנים את העובדה שרשת הדירקטורים בישראל הינה רשת עם ממסרים מהירים של אינפורמציה, בה פרקטיקות-טובות ורעות-עוברות מהר.

אנו מקווים כי עבודה זו מהווה ראשיתה של סדרת עבודות בנושא רשתות מקצועיות בישראל בתחום חברות ושוק ההון, שנראה שללא הבנה עמוקה שלהן, אנו "מפספסים" את התמונה.

נספח א'

אופן החישוב של רשת הדירקטורים האקראית

The degree distribution associates a probability P_k with each possible value of the degree k , where k is any non-negative integer. Such distributions permit one to construct a probability generating function, $G(x)$, which is a function of one variable defined by the infinite sum

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \quad (6)$$

and it is a general property of generating functions that $G(1) = 1$. For generating functions arising from degree distributions the mean degree is given by

$$z = \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = G'(1) \quad (7)$$

Here the angle brackets are the expectation operator. Formulae for higher moments of the distribution, as well for the generating functions for sums of independent samples from distribution are also simply related to $G(x)$. Generating functions arising from empirical degree distributions are, of necessity, finite polynomials as any real data set has a node of highest degree and thus a maximal nonzero p_k .

A bipartite graph of the corporate world has two empirical degree distributions and so gives rise to two generating functions. One, which we shall call $f_0(x)$, generates the degree distribution for the directors. That is, it generates the distribution of the number of boards on which a director sits.

For concreteness, say that the frequency with which one finds a director serving on j boards is p_j . Then $f_0(x)$ is given by

$$f_0(x) = \sum_j p_j x^j \quad (8)$$

We shall refer to the other empirical distribution, the one for the degree of boards (that is, the number of directors per board) as $g_0(x)$. So if the empirical frequency for boards made up of k directors is q_k then $g_0(x)$ is

$$g_0(x) = \sum_k q_k x^k \quad (9)$$

Our real objects of interest are the two projections of the bipartite graph: one whose nodes are boards and whose edges represent shared directors (the graph showing board interlocks) and another whose nodes are directors and whose edges connect directors that sit on one (or more) board in common. The charm of the generating function approach is that it permits one to start with the empirical generating functions $f_0(x)$ and $g_0(x)$ and derive expressions for the generating functions for the degree distributions in the projections. We will refer to these derived distributions as the theoretical degree distributions to emphasize that they are not measured directly from the data. Instead, they describe the distribution of degrees one would find in random corporate worlds constructed by applying the methods of the previous section to the empirical degree distributions. These theoretical degree distributions are the device by which we obtain expected values of the small-world statistics without having to generate and analyze random graphs.

Suppose now that we are investigating a corporate world in which N directors sit on M boards. Suppose further that the mean number of seats on a board is v and that the mean number of directorships held is μ . The bipartite graph representing this community has one edge for each seat on a board and so

$$vM = (\text{number of seats on boards}) = \mu N.$$

We will refer to the generating function for theoretical degree distribution of the projection onto directors as $G_0(x)$. Newman et al. (2001) show that it is given by

$$G_0(x) = f_0\left(\frac{g_0'(x)}{g_0'(1)}\right) = f_0\left(\frac{1}{v} g_0'(x)\right) \quad (10)$$

where $g_0'(1) = v$ is the mean board size. As the empirical generating functions $f_0(x)$ and $g_0(x)$ are finite polynomials, $G_0(x)$ is too. By examining its coefficients one can obtain predictions for the frequencies with which vertices of various degrees will appear in the projection: that is, one can obtain the probabilities that define the theoretical degree distribution. But one can predict other things as well; the expected degree of a vertex in the projection (that is, the expected total number of codirectors for a randomly selected director) is

$$z = G_0'(1) \quad (11)$$

and the expected mean path length in the projection is

$$\langle L \rangle = 1 + \frac{\ln(N / G_0'(1))}{\ln\left(\left(\frac{f_0''(1)}{f_0'(1)}\right)\left(\frac{g_0''(1)}{g_0'(1)}\right)\right)} \quad (12)$$

Note that the quantity in the denominator involves ratios of the first and second derivatives of the empirical generating functions. Additionally, one can predict the value of one of the two clustering coefficients:

$$\langle C_\Delta \rangle = \frac{M \cdot g_0'''(1)}{N \cdot G_0''(1)} \quad (13)$$

The corresponding expressions for the projection whose vertices are boards may be obtained similarly and are

$$F_0(x) = g_0\left(\frac{f_0'(x)}{f_0'(1)}\right)$$

$$z = F_0'(1)$$

$$\langle L \rangle = 1 + \frac{\ln(M / F_0'(1))}{\ln\left(\left(\frac{g_0''(1)}{g_0'(1)}\right)\left(\frac{f_0''(1)}{f_0'(1)}\right)\right)}$$

$$\langle C_\Delta \rangle = \frac{N \cdot f_0'''(1)}{M \cdot F_0''(1)} \quad (14)$$

In our empirical work below we use equations 10,12, and 13 for the projection whose vertices are directors and equations 14 for the projection whose vertices are boards. We then calculate the actual path lengths and

clustering coefficients from the data on the US, Britain and Germany. We compare these to the afore mentioned random graph measures, constructed on the observed degree distribution. Our approach differs from such prior small-world research in the social science literature as that of Kogut & Walker (2001), Davis et al. (2003), Baum et al. (2003) and Schilling & Phelps (2004). These researchers compare actual small-world measures to those arising from an unstructured (i.e. Poisson) random graph. However, the degree distribution of their networks is likely to be measurably different from a Poisson distribution. In consequence, such an approach can lead to the possibility of concluding that the world is “small” when in fact it is not much different from what one would expect by chance, given the degree structure-the distributions of board size and number of directorships held-observed in the social network of corporate governance.

נספח ב'

ניתוח מתמטי של אילוצי גודל בעולם הדירקטוריים

אחד מן התחומים החדשים יחסית במתמטיקה, הקשור לנושא שבפנינו, הוא התחום של EXTREMAL COMBINATORICS. להלן נביא, בהסתמך על תחום זה, מספר תוצאות מעניינות לעולם הדירקטוריים. מעניינות-בעיקר מן הטעם שהן מראות קיומו של קשר בין מבנה הרשת לאילוצים המוטלים על הפרמטרים בה. עם זאת, מעניינות, לא פחות בשל כך שמרבית התוצאות הן כאלה שהן אינן כופות, בניגוד לאינטואיציה, הגבלות על הרשת.

נגדיר את אוסף הדירקטוריים כקבוצה סופית X . נניח שמספרם הוא N . נגדיר את אוסף הדירקטוריונים שניתן ל"ייצר" מקבוצת הדירקטוריים כמשפחה של תת קבוצות של X ונשאל את עצמנו סדרה של שאלות מעניינות על גודלה האפשרי של משפחה זו של דירקטוריונים בהנחות שונות.

למשל, נניח כי כל הדירקטוריונים באותו גודל בדיוק K (הנחה שעוד מעט נסירה). זוהי לא הנחה התואמת את המציאות במדויק, אך היא אינה גסה מדי. נניח גם כי כל שתי קבוצות במשפחה נחתכות בחיתוך לא ריק. היינו, לכל שני דירקטוריונים יש לפחות דירקטור אחד במשותף (בישראל אנחנו רחוקים ממצב זה). בתרגום למונחי גרפים, משמעות הדבר שהמרחק בין כל שני דירקטוריים הוא לכל היותר 2. כדי להפוך את הדיון למעניין, נניח כי מספר הדירקטוריים הכולל גדול בכפלים ויותר מגודל דירקטוריון (ונזכיר, הנחנו שכולם באותו גודל), היינו: $2K \leq N$.

השאלה העולה היא, כמה דירקטוריונים יכולים להיות לכל היותר במגבלות אלו? ובכן, התשובה ניתנת על ידי משפט מתמטי חשוב, משנת 1938, של RADO-KO-ERDOS, לפיו מספר הדירקטוריונים אינו יכול לעלות על גודל הנתון על ידי המקדם הבינומי. בניסוח מתמטי:

If $n \geq 2k$, and A is a family of distinct subsets of $\{1,2,\dots,n\}$, such that each subset is of size k , and each pair of subsets intersects, then the maximum number of sets that can be in A is given by the binomial coefficient

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

אם נניח שהגודל האחיד של דירקטוריון הוא 6 דירקטורים ואילו כמות הדירקטורים הכללית היא 3000, נקבל שניתן לבנות עולם שבו **אינספור** דירקטוריונים בהם 6 דירקטורים, שבין כל שניים יש לפחות דירקטור משותף אחד. היינו, בניגוד לאינטואיציה, דרישת הגודל האחיד עם דרישת מרחק שלא יעלה על 2 בין כל שני דירקטורים אינה מקשה על היווצרות מספר ענק של דירקטוריונים.

תוצאה מעניינת, פשוטה בהרבה, המזכירה את משפט HELLY מהתורה של קבוצות קמורות, ואשר אינה מתייחסת להנחות לעיל, משרטטת מגבלה אחרת:

נתבונן במשפחה של דירקטוריונים, המורכבים מהדירקטורים ב X , ונניח שהדירקטוריון **הקטן ביותר** הוא בגודל K . אם כל $K+1$ דירקטוריונים הם בעלי חיתוך לא ריק, היינו, נהנים מדירקטור משותף (מספיק אחד), אזי כל הדירקטוריונים הם בעלי חיתוך לא ריק. לדוגמא, בעולם בו דירקטוריון בן 3 דירקטורים הוא הדירקטוריון הקטן ביותר, מספיק שכל 4 דירקטוריונים נחתכים-היינו, נהנים מדירקטור משותף- כדי שהקבוצה כולה תיחתך, היינו, תהנה מדירקטור משותף לכולם.

שאלה מעניינת אחרת קשורה במקרה בו **כל** הדירקטוריונים נהנים מאותה כמות של **דירקטורים משותפים**. היינו, גודל קבוצת החיתוך של כל שני דירקטוריונים הוא אחיד על פני כל חיתוכי הדירקטוריונים. היינו, נניח ש X היא קבוצה בת N דירקטורים ממנה הורכבו M דירקטוריונים בעלי תכונת החיתוך האמורה: שכל שני דירקטוריונים נהנים מאותה כמות **בדיוק** של דירקטורים משותפים. משפט מפורסם של FISHER משנת 1941 קובע כי $N \geq M$. היינו, יש פחות דירקטוריונים מדירקטורים. בהחלט תוצאה מאוד לא אינטואיטיבית.

היינו, זו כבר מגבלה. אם יש לנו קבוצה של 100 דירקטורים פוטנציאליים, ממנה נרצה לבנות 200 חברות, אשר בין כל שתיים תהיה בדיוק אותה כמות של דירקטורים משותפים, אפילו אחד בלבד, לא נוכל לעשות זאת.

תוצאה חשובה זו הורחבה למקרה המציאותי יותר הבא, המטופל על ידי משפט RAY-CHAUDHURI (כשכל הדירקטוריונים באותו גודל) ועל ידי FRANKL-WILSON למקרה בו הדירקטוריונים עצמם אינם בהכרח בגודל אחיד:

אם קיימות T אפשרויות לגודל קבוצת החיתוך, ולא רק אפשרות אחת כבמשפט FISHER,

$$\sum_{j=0}^T \binom{n}{j} \geq M : N \geq M$$

היינו, מספר האפשרויות לבנות עולם של דירקטוריונים גדל דרמטית אם מקלים, ולו במעט, את הדרישה שכל הדירקטוריונים ייהנו **בדיוק** מאותה כמות של דירקטורים משותפים. עבור 100 דירקטורים מספיק שתינתנה שתי אפשרויות לכמות הדירקטורים המשותפים (למשל, או דירקטור משותף אחד או שניים) כדי שמספר הדירקטוריונים הגדול ביותר האפשרי יעלה מ-100 ליותר מ-5000. מובן שכל התערבות רגולטורית חייבת לקחת בחשבון השפעת אילוצים אלה על מרחב האפשרויות להיווצרות דירקטוריונים.

כיוון אחר של דיון קשור לשרשראות-CHAINS. בהינתן קבוצה של דירקטוריונים המורכבים מדירקטורים הלקוחים מהקבוצה X בה יש N דירקטורים, עולה השאלה כמה דירקטוריונים ניתן ליצור לפני שאחד יוכל ממש על ידי אחר, היינו אחד יורכב מאותם הדירקטורים של השני בתוספת דירקטורים נוספים. התשובה ניתנת על ידי משפט של SPERNER משנת 1928 והיא מצביעה, אולי בניגוד לאינטואיציה, על כך שהמספר האפשרי הוא גדול מאוד.

ביבליוגרפיה נבחרת

- בראבשי, א.ל. (2006) קישורים - המדע החדש של רשתות. ידיעות אחרונות – ספרי חמד.
- סולגניק אייל (יולי 2005), החשבונאות המודרנית לאור רעיונות גדולים אחרים: "הערות חופשיות", המרכז הבינתחומי הרצליה.
- Abrams and Strogatz, Modeling the dynamics of language death, Nature 424 (2003) 900
- Barabashi E.L. Onnela J.P, Saramaki J., Hyvonen J., Szabo G., Lazer D., Kaski K., Kertesz J. (2007), Structure and tie strengths in mobile communication networks, Proceedings of the National Academy of Sciences 104 (18), 7332-7336.
- Booth, J. & Daniel D. (1996) "Factors affecting the number of outside directorships held by CEO's". Journal of Financial Economics 40, pp. 81-104.
- Beasley M. (1996) "An empirical analysis of the relation between the board of director composition and financial statement fraud". Accounting Review, 71, pp 443-465.
- Chhaochharia V. & Grinstein Y. (2004), "The Transformation of US Corporate Boards: 1997-2003".
- Conyon, M. J. & Muldoon M. R., (2004) "The small world network structure of boards of directors".
- Conyon M.J. & Muldoon M.R. (2004), "Ranking the importance of board of directors".
- Conyon, Martin J. and Muldoon, Mark R., "Ranking Boards of Directors" (January 2008).
- Conyon, Martin J. and Muldoon, Mark R., "Ownership and Control: A Small-World Analysis" (December 2007).

- Fich E. (2005) "Are some outside directors better than others? Evidence from director appointment by fortune 1000 firms". The Journal of Business, 18, pp. 1443-1972.
- Fich, E. & Anil (2006) "Are Busy boards Effective Monitors?", The journal of finance. Vol. 61. No. 2.
- Fich, Eliezer M. & Shivdasani, Anil, (2006) "Financial Fraud, Director Reputation, and Shareholder Wealth" , AFA 2006 Boston Meetings Paper.
- J. Travers, S. Milgram, Sociometry 32, 425 (1969), An Experimental Study of the Small World Problem
- Lie E. (2005), "On the Timing of CEO Stock Option Awards", management science, pp. 802-812.
- Lie E. & Heron R.A. (2006), "What fraction of stock option grants to top executives have been backdated or manipulated?".
- Lu H. & Scott E. (2004) Page Groups of diverse problem solvers can outperform groups of high-ability problem solvers PNAS.
- Marielle N.C. & Franses P.H, (2007) "Interlocking Boards and Firm Performance: Evidence from a New Panel Database"
- N.Alon and P. Erdős, An application of graph theory to additive number theory, European J. Combinatorics 6 (1985), 201-203.
- Non, Marielle C. and Franses, Philip Hans (2007), "Interlocking Boards and Firm Performance: Evidence from a New Panel Database".
- Stephen F., Jaganmathan M. & Adam Pritchard (2003) "Too busy to mind the business monitoring by directors with multiple board appointment" The Journal of Finance, 58, pp/ 1087-1111.
- [http://math.eitan.ac.il/graph theory/200 Short/202 Short Dij.htm](http://math.eitan.ac.il/graph%20theory/200%20Short/202%20Short%20Dij.htm)
- <http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/301/5634/827>
- <http://www.oakland.edu/enp>